Dualità forte e condizioni di ottimalità

- Dualità forte
- Dualità debole
- Condizioni di scarto complementare

BT 4.3

Dualità debole

Teorema

Data una soluzione ammissibile $\mathbf{x}$ del problema primale (in forma generica) ed una $\mathbf{p}$ del duale, risulta $\mathbf{p}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Dimostrazione Definiamo le quantità

$$u_i = p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i) \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$v_j = (c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

Quindi:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}; \qquad \sum_{j=1}^{n} v_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

da cui:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}$$

Dimostrazione (cont.)

ricordando le regole di costruzione:

primale	duale
$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1$	$p_i \geq 0, \quad i \in M_1$
$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2$	$p_i \leq 0, \quad i \in M_2$
$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3$	p_i libero, $\quad i \in M_3$
$x_j \geq 0, \quad j \in N_1$	$\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \leq c_j, \quad j \in N_1$
$x_j \leq 0, \quad j \in N_2$	$\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \geq c_j, \quad j \in N_2$
x_j libero, $\quad j \in N_3$	$\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j = c_j, \quad j \in N_3$

si ha che:

$$u_i \geq 0, i = 1, \ldots, m; \qquad v_j \geq 0, j = 1, \ldots, n.$$

da cui

$$0 \leq \sum_i u_i + \sum_j v_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}$$

$\square$

Conseguenze

Corollario

(a) se il primale è (inferiormente) illimitato, allora il duale è inammissibile

(b) se il duale è (superiormente) illimitato, allora il primale è inammissibile

casi possibili:

	Ottimo finito	Illimitato	Inammissibile
Ottimo finito		NO	
Illimitato	NO	NO	SI
Inammissibile		SI	

Dualità forte

Teorema

Se un problema di PL ha una soluzione ottima anche il suo duale ce l'ha e i rispettivi valori coincidono

Dimostrazione (forma standard)

Consideriamo un problema

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Applicando il metodo del simplesso (con una regola anticiclaggio), si calcola una soluzione ottima $\mathbf{x}^*$ associata alla base $\mathbf{B}$. Alla terminazione **Test_Opt** $\rightarrow$ *true*:

$$\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}^T$$

Dimostrazione (cont.)

Quindi, definendo $\mathbf{p}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ risulta $\mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$, cioè, $\mathbf{p}$ è una soluzione ammissibile del problema duale

$$\max \mathbf{p}^T \mathbf{b}$$

$$\text{s.t.}$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$$

ed inoltre si ha:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

cioè, $\mathbf{p}$ è una soluzione ottima del problema duale e i due valori ottimi coincidono $\square$

Conseguenze

	Ottimo finito	Illimitato	Inammissibile
Ottimo finito	SI	NO	NO
Illimitato	NO	NO	SI
Inammissibile	NO	SI	-

Infine, esistono problemi di PL per cui sia il primale che il duale sono inammissibili.

Esercizio Dato il problema primale:

$$\begin{aligned} \min x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

scrivere il suo duale e verificare che sono entrambi inammissibili

Condizioni di scarto complementare

Teorema

Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ soluzioni ammissibili risp. per il problema primale e duale. Esse sono ottime se e solo se

$$p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

$$(c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

Dimostrazione Ricordiamo dalla dimostrazione della dualità debole che $u_i \geq 0$, $v_j \geq 0$ e che $\sum_i u_i + \sum_j v_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}$. Quindi, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ sono ottime, per il teorema della dualità forte si ha $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b} = 0$, cioè $u_i = v_j = 0, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$.

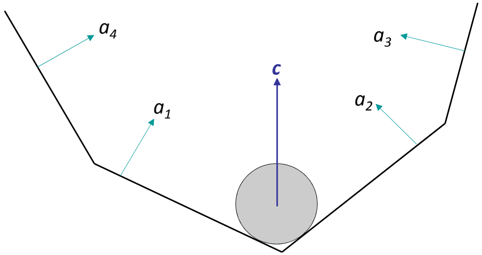
Viceversa, se $u_i = v_j = 0$ per ogni i, j, si ha $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b} = 0$ che implica $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ soluzioni ottime. □

Condizioni di scarto complementare

- la prima condizione è sempre verificata se il problema è in forma standard
- in caso contrario, per un vincolo $a_i^T x \geq b_i$, la variabile duale p_i deve essere nulla se il vincolo non è attivo in $\mathbf{x}$
- intuitivamente, un vincolo non attivo può essere rimosso senza cambiare il valore ottimo. Quindi, il "prezzo" duale di quel vincolo rimane a zero

Interpretazione fisica

Una sfera solida giace in un poliedro descritto da disuguaglianze $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b_i$.
Soggetta alla forza di gravità, la sfera raggiunge il punto di minima energia potenziale x^*:



possiamo immaginare il punto di equilibrio come la soluzione ottima del problema $\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, \forall i$

Interpretazione fisica

all'equilibrio, la forza di gravità è bilanciata dalle spinte delle pareti, ortogonali alle stesse, cioè allineate ai vettori $\mathbf{a}_i$. Quindi, si ha

$$\mathbf{c} = \sum_i p_i \mathbf{a}_i$$

con p_i moltiplicatori non negativi.

In altre parole $\mathbf{p}$ è soluzione ammissibile del problema duale

$$\begin{aligned} \max \mathbf{p}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{p}^T \mathbf{A} = \mathbf{c}^T \\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Interpretazione fisica

Inoltre:

- per le pareti che non toccano la sfera si ha $p_i = 0$
- per le pareti che toccano la sfera si ha $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$

e quindi

$$p_i(b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^*) = 0$$

Di conseguenza, vale la relazione

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = \sum_i p_i b_i = \sum_i p_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

In altri termini, il vettore $\mathbf{p}$ è una soluzione ottima del problema duale

Applicazione: calcolo di una soluzione ottima duale

Se il primale è in forma standard ed è nota una sba ottima e non degenere le condizioni di scarto complementare individuano un'unica soluzione ottima per il duale.

Esempio

primale:

$$\begin{aligned} \min 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

duale:

$$\begin{aligned} \max 8p_1 + 3p_2 \\ \text{s.t.} \\ 5p_1 + 3p_2 \leq 13 \\ p_1 + p_2 \leq 10 \\ 3p_1 \leq 6 \end{aligned}$$

Applicazione: calcolo di una soluzione ottima duale

- $x^* = (1, 0, 1)$ è una sba ottima e non degenere del problema primale
- la condizione $p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* - b_i)$ è verficata (forma standard)
- la condizione $(c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j)x_j^* = 0$ è soddisfatta per $j = 2$, essendo $x_2^* = 0$;
- per $j = 1, 3$ deve essere:

$$\begin{aligned} 5p_1 + 3p_2 &= 13 \\ 3p_1 &= 6 \end{aligned}$$

- da queste condizioni ricaviamo $p_1^* = 2, p_2^* = 1$
- questa è una soluzione ammissibile per il problema duale di valore 19, lo stesso della soluzione $\mathbf{x}^*$ del problema primale