Teoremi di dualità e condizioni di ottimalità

- Teorema di dualità debole
- Teorema di dualità forte
- Condizioni di scarto complementare

BT 4.3

Richiamo

Ricordiamo che, dato un problema in forma standard e definita la funzione

$$g(\mathbf{p}) = \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

vale la seguente

Proposizione Per ogni vettore $\mathbf{p}$ di moltiplicatori, si ha $g(\mathbf{p}) \leq z^*$

Ciò implica che il valore ottimo del problema duale

$$\max_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^m} g(\mathbf{p})$$

no vincoli

rappresenta una limitazione inferiore del valore ottimo primale z^*. Mostriamo adesso che tale proprietà è vera in generale

In generale

	primale	duale	
	$\min\ \mathbf{c}^T\mathbf{x}$	$\max\ \mathbf{p}^T\mathbf{b}$	
vincoli	$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3$	$p_i \geq 0, \quad i \in M_1$ $p_i \leq 0, \quad i \in M_2$ p_i libera, $\quad i \in M_3$	variabili
variabili	$x_j \geq 0, \quad j \in N_1$ $x_j \leq 0, \quad j \in N_2$ x_j libera, $\quad j \in N_3$	$\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \leq c_j, \quad j \in N_1$ $\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \geq c_j, \quad j \in N_2$ $\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j = c_j, \quad j \in N_3$	vincoli

Dualità debole

Teorema
Data una soluzione ammissibile $\mathbf{x}$ del problema primale (in forma generica) ed una $\mathbf{p}$ del duale, risulta $\mathbf{p}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Dimostrazione Definiamo

$$u_i = p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i) \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$v_j = (c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

sommando:

$$\sum_{i=1}^m u_i = \mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}; \qquad \sum_{j=1}^n v_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^n v_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}$$

In generale

	primale	duale	
vincoli	$\min\ \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3$	$\max\ \mathbf{p}^T\mathbf{b}$ $p_i \geq 0, \quad i \in M_1$ $p_i \leq 0, \quad i \in M_2$ p_i libera, $\quad i \in M_3$	variabili
variabili	$x_j \geq 0, \quad j \in N_1$ $x_j \leq 0, \quad j \in N_2$ x_j libera, $\quad j \in N_3$	$\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \leq c_j, \quad j \in N_1$ $\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \geq c_j, \quad j \in N_2$ $\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j = c_j, \quad j \in N_3$	vincoli

Dimostrazione (cont.)

Inoltre, per costruzione, si ha:

$$u_i = p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$
$$v_j = (c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j) x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

da cui

$$\sum_i u_i + \sum_j v_j = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{p}^T \mathbf{b} \geq 0$$

cioè

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$\square$

Conseguenze

$$\mathbf{p}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Corollario

(a) se il primale è (inferiormente) illimitato, allora il duale è inammissibile

(b) se il duale è (superiormente) illimitato, allora il primale è inammissibile

casi possibili per la coppia di problemi primale-duale:

	Ottimo finito	Illimitato	Inammissibile
Ottimo finito		NO	
Illimitato	NO	NO	SI
Inammissibile		SI	

Conseguenze

$$\mathbf{p}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Corollario
Sia $\bar{\mathbf{x}}$ una soluzione ammissibile per il problema primale e $\bar{\mathbf{p}}$ una soluzione ammissibile per il problema duale. Se $\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}$ allora $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{p}}$ sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi.

Dimostrazione È immediato osservare che

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} \text{ implica l'ottimalità di } \bar{\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{p}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{b} \text{ implica l'ottimalità di } \bar{\mathbf{p}}$$

$\square$

Dualità forte

Teorema

Se un problema di PL ha una soluzione ottima anche il suo duale ce l'ha e i rispettivi valori coincidono

Dimostrazione (forma standard)

Consideriamo un problema

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Applicando il metodo del simplesso (con una regola anticiclaggio), si calcola una soluzione ottima $\mathbf{x}^*$ associata alla base $\mathbf{B}$. Alla terminazione **Test_Opt** $\rightarrow$ *true*:

$$\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}^T$$

Dimostrazione (cont.)

Definiamo il vettore di moltiplicatori $\mathbf{p}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$: la condizione di ottimalià equivale a $\mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$, cioè, $\mathbf{p}$ è una soluzione ammissibile del problema duale

$$\begin{gathered} \max \mathbf{p}^T \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \\ \mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \end{gathered}$$

ed inoltre si ha:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

quindi, per il corollario precedente, $\mathbf{p}$ è una soluzione ottima del problema duale e i due valori ottimi coincidono $\square$

Conseguenze

Indicando con $\mathbf{p}^*$ la soluzione ottima del problema duale, il teorema di dualità forte afferma che

$$(\mathbf{p}^*)^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$$

Corollario Casi possibili per la coppia di problemi

primale-duale:

	Ottimo finito	Illimitato	Inammissibile
Ottimo finito	SI	NO	NO
Illimitato	NO	NO	SI
Inammissibile	NO	SI	-

Conseguenze

Infine, esistono problemi di PL per cui sia il primale che il duale sono inammissibili.

Esercizio Dato il problema primale:

$$\begin{aligned} \min x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

scrivere il suo duale e verificare che sono entrambi inammissibili

Condizioni di scarto complementare

Teorema
Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ soluzioni ammissibili risp. per il problema primale e duale. Esse sono **ottime se e solo se**

$$p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (1)$$

$$(c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

Dimostrazione Nella dimostrazione della dualità debole abbiamo definito

$$u_i = p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i) \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$v_j = (c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

ed osservato che, per costruzione, $u_i \geq 0$, $v_j \geq 0$

Condizioni di scarto complementare

Inoltre,

$$\sum_i u_i + \sum_j v_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}$$

Quindi, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ sono ottime, per il teorema della dualità forte, si ha $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b} = 0$, cioè

$$u_i = v_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$$

Viceversa, se $u_i = v_j = 0$ per ogni i, j, si ha $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b} = 0$ che implica $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ soluzioni ottime. $\square$

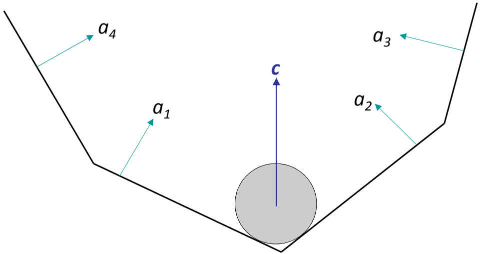
Condizioni di scarto complementare

$$p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i) = 0, \qquad i = 1, \dots, m$$
$$(c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j = 0, \qquad j = 1, \dots, n$$

- la prima condizione è sempre verificata se il problema è in forma standard
- in caso contrario, per un vincolo $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i$, la variabile duale p_i deve essere nulla se il vincolo non è attivo in $\mathbf{x}$
- intuitivamente, un vincolo non attivo può essere rimosso senza cambiare il valore ottimo. Quindi, il "prezzo" duale di quel vincolo rimane a zero

Interpretazione fisica

- Una sfera solida giace in un contenitore poliedrale descritto da disuguaglianze $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b_i$
- soggetta alla forza di gravità, la sfera raggiunge il punto di minima energia potenziale $\mathbf{x}^*$
- possiamo immaginare il punto di equilibrio $\mathbf{x}^*$ come la soluzione ottima di un problema di PL

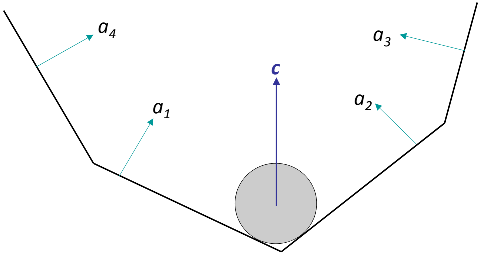


$$\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

s.t.

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, \forall i$$

Interpretazione fisica



$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

s.t.

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, \forall i$$

Interpretazione fisica

all'equilibrio, la forza di gravità è bilanciata dalle spinte delle pareti, ortogonali alle stesse, cioè allineate ai vettori $\mathbf{a}_i$.
Quindi, si ha

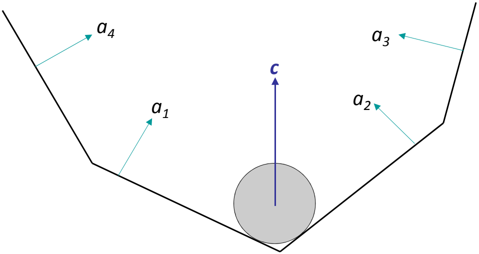
$$\mathbf{c} = \sum_i p_i \mathbf{a}_i$$

con p_i moltiplicatori non negativi.

In altre parole $\mathbf{p}$ è soluzione ammissibile del problema duale

$$\begin{aligned} \max \mathbf{p}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{p}^T \mathbf{A} = \mathbf{c}^T \\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Interpretazione fisica



primale

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

s.t.

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, \forall i$$

duale

$$\max \mathbf{p}^T \mathbf{b}$$

s.t.

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A} = \mathbf{c}^T$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$$

Interpretazione fisica

Inoltre:

- per le pareti che non toccano la sfera si ha $p_i = 0$
- per le pareti che toccano la sfera si ha $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$

e quindi

$$p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* - b_i) = 0$$

Di conseguenza, vale la relazione

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = \sum_i p_i b_i = \sum_i p_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

In altri termini, il vettore $\mathbf{p}$ è soluzione ottima del problema duale

Applicazione: calcolo di una soluzione ottima duale

Se il primale è in forma standard ed è nota una sba ottima e non degenere le condizioni di scarto complementare individuano un'unica soluzione ottima per il duale.

Esempio

primale:

$$\begin{aligned} \min 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

duale:

$$\begin{aligned} \max 8p_1 + 3p_2 \\ \text{s.t.} \\ 5p_1 + 3p_2 \leq 13 \\ p_1 + p_2 \leq 10 \\ 3p_1 \leq 6 \end{aligned}$$

Applicazione: calcolo di una soluzione ottima duale

- $\mathbf{x}^* = (1, 0, 1)$ è una sba ottima e non degenere del problema primale
- la condizione $p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* - b_i) = 0$ è verficata (forma standard)
- la condizione $(c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j)x_j^* = 0$ è soddisfatta per $j = 2$, essendo $x_2^* = 0$;
- per $j = 1, 3$ deve essere:

$$\begin{aligned} 5p_1 + 3p_2 &= 13 \\ 3p_1 &= 6 \end{aligned}$$

- da queste condizioni ricaviamo $p_1^* = 2, p_2^* = 1$
- questa è una soluzione ammissibile per il problema duale di valore 19, lo stesso della soluzione $\mathbf{x}^*$ del problema primale

Applicazione: calcolo di una soluzione ottima duale

Interpretiamo il risultato in generale: la soluzione $\mathbf{x}^*$ è la sba associata alla base $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3] = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

dato che la base è non degenere, la condizione $(c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j) x_j^* = 0$ equivale ad imporre $c_j = \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j$ se $j \in \{B(1), \ldots, B(m)\}$, cioè $\mathbf{p}^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T$

data la non singolarità della matrice B questo sistema lineare ha un'unica soluzione $\mathbf{p}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$

nell'esempio infatti $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = (13 \quad 6) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & -5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$