Metodo del simplesso duale

- analisi duale del metodo del simplesso
- metodo del simplesso duale

Fi 4.6, 4.7

Metodo del Simplesso (forma matriciale)

Input:	$\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{B} = [\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}]$ (base ammissibile iniziale)
Output:	$\mathbf{x}$ sol. ottima **OR** $illim = true$
INIT.	$illim := false$, $opt := false$
MAIN LOOP	**while** ($illim = false$ **and** $opt = false$)
	calcola $\mathbf{B}^{-1}$
	$\mathbf{Test\_Opt}(\mathbf{B}^{-1}) \rightarrow \bar{\mathbf{c}}, opt$
	if ($opt = true$) **then return** $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
VAR. IN	**else** scegli $h \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ con $\bar{c}_h < 0$
	$\mathbf{Test\_Illim}(\mathbf{B}^{-1}, h) \rightarrow \bar{\mathbf{A}}_h, illim$
	if ($illim = true$) **then** "STOP: prob. illimitato"
	else
VAR. OUT	calcola $t := \arg\min_{i \in \{1,\ldots,m\}} \{\bar{b}_i / \bar{a}_{ih} : \bar{a}_{ih} > 0\}$
UPDATE $\mathbf{B}$	$B(t) := h$
END LOOP	**end_while**

Test di ottimalità

Test_Opt

Input: $\mathbf{B}^{-1}$

Output: $\bar{\mathbf{c}}$, $opt \in \{true, false\}$

INIT. $opt := false$

calcola $\mathbf{u}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$

$\bar{\mathbf{c}}_F^T := \mathbf{c}_F^T - \mathbf{u}^T F$

TEST **if** $\bar{\mathbf{c}}_F \geq \mathbf{0}$ **then** $opt := true$

Condizioni di ottimalità: forma standard

Il metodo del Simplesso si applica a problemi in forma standard, quindi le condizioni di ottimalità per una coppia primale-duale di vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ sono:

(i) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (ammissibilità primale)

(ii) $\mathbf{u}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$ (ammissibilità duale)

(iii) $(\mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = 0$ (scarto complementare)

Infatti, l'altra condizione di scarto complementare $\mathbf{u}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$ è sempre verificata

Condizioni di ottimalità: forma standard

I vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ sono soluzioni ottime rispettivamente per il problema primale e duale se:

(i)	$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	(ammissibilità primale)
(ii)	$\mathbf{u}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$	(ammissibilità duale)
(iii)	$(\mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = 0$	(scarto complementare)

Analisi del metodo del simplesso

Alla generica iterazione, il metodo del simplesso calcola i vettori:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}) \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{u}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$
$$\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T \mathbf{A}$$

e si arresta quando $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$. Si ha che:

- la sba corrente $\mathbf{x}$ è ammissibile per il problema primale: (i) è soddisfatta
- $(\mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = (\mathbf{c}_B^T - \mathbf{u}^T\mathbf{B})\mathbf{x}_B + (\mathbf{c}_F^T - \mathbf{u}^T\mathbf{F})\mathbf{x}_F = 0$: la condizione di scarto complementare (iii) è soddisfatta

Condizioni di ottimalità: forma standard

I vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ sono soluzioni ottime rispettivamente per il problema primale e duale se:

(i) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (ammissibilità primale)

(ii) $\mathbf{u}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$ (ammissibilità duale)

(iii) $(\mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = 0$ (scarto complementare)

Analisi del metodo del simplesso

- al contrario, la condizione (ii) è soddisfatta solo quando $\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, cioè quando **Test_Opt** $\rightarrow true$ e il metodo si arresta

quindi, alla generica iterazione, il vettore $\mathbf{u}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ non è una soluzione ammissibile del problema duale, mentre lo diventa alla terminazione

Metodo del simplesso duale

(i) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (ammissibilità primale)

(ii) $\mathbf{u}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$ (ammissibilità duale)

(iii) $(\mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = 0$ (scarto complementare)

Sviluppiamo un nuovo algoritmo che rovescia il punto di vista, cioè mantiene $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ tali da soddisfare sempre le condizioni (ii) e (iii), mentre la (i) solo alla terminazione.

Quindi, $\mathbf{x}$ è una soluzione di base NON ammissibile durante l'esecuzione e il metodo si arresta quando ne certifica l'ammissibilità

Si applica al problema primale $\{\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

Metodo del simplesso duale (implementazione tableau)

Richiede un tableau iniziale in forma canonica del tipo:

x_1	$\cdots$	x_t	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_h	$\cdots$	x_n		
0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\bar{c}_{m+1}$		$\bar{c}_h$		$\bar{c}_n$	$\bar{c}_0$	$-z$
1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	$\cdots$		$\cdots$	$\bar{a}_{1,n}$	$\bar{b}_1$	x_1
0		0		0		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\bar{a}_{t,m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{t,h}$	$\cdots$	$\bar{a}_{t,n}$	$\bar{b}_t$	x_t
0		0		0		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	$\cdots$		$\cdots$	$\bar{a}_{m,n}$	$\bar{b}_m$	x_m

in cui $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n \geq 0$ (ammissibilità duale).

Se $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m \geq 0$, allora il tableau è ottimo

Metodo del simplesso duale

x_1	$\cdots$	x_t	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_h	$\cdots$	x_n		
0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\bar{c}_{m+1}$		$\bar{c}_h$		$\bar{c}_n$	$\bar{c}_0$	$-z$
1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	$\cdots$		$\cdots$	$\bar{a}_{1,n}$	$\bar{b}_1$	x_1
0		0		0		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\bar{a}_{t,m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{t,h}$	$\cdots$	$\bar{a}_{t,n}$	$\bar{b}_t$	x_t
0		0		0		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	$\cdots$		$\cdots$	$\bar{a}_{m,n}$	$\bar{b}_m$	x_m

in cui $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n \geq 0$ (ammissibilità duale)

Se $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m \geq 0$, allora il tableau è ottimo

Metodo del simplesso duale

Se esiste un valore $\bar{b}_t < 0$ ci sono due casi:

caso 1: $\bar{a}_{tj} \geq 0, j = 1, \ldots, n$

si ha $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{tj} x_j \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

quindi, l'equazione associata alla riga t del tableau non può essere soddisfatta: problema inammissibile

caso 2 esiste un valore $\bar{a}_{th} < 0$

facendo PIVOT sull'elemento (t, h) il termine $\bar{b}_t$ diventa positivo
[si osservi che abbiamo così scelto la variabile uscente, che può essere una qualsiasi x_i in base per cui $\bar{b}_i < 0$]

Scelta della variabile entrante

L'operazione di PIVOT calcola i nuovi valori in riga 0:

$$\tilde{c}_j := \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_h}{\bar{a}_{th}} \bar{a}_{tj}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\tilde{c}_0 = \bar{c}_0 - \frac{\bar{c}_h}{\bar{a}_{th}} \bar{b}_t$$

Per mantenere l'ammissibilità duale, si deve imporre $\tilde{c}_j \geq 0$, cioè [ricordate che $\bar{a}_{th} < 0$]

$$\bar{c}_j \geq \frac{\bar{c}_h}{\bar{a}_{th}} \bar{a}_{tj} = \frac{\bar{c}_h}{-|\bar{a}_{th}|} \bar{a}_{tj}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

essendo $\bar{c}_j \geq 0$, questo è sempre vero se $\bar{a}_{tj} \geq 0$

Scelta della variabile entrante

$$
\begin{array}{|ccccc|ccccc|c|c}
x_1 & \cdots & x_t & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_h & \cdots & x_n & & \\
\hline
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{m+1} & & \bar{c}_h & & \bar{c}_n & \bar{c}_0 & -z \\
\hline
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{1,m+1} & \cdots & & \cdots & \bar{a}_{1,n} & \bar{b}_1 & x_1 \\
0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \bar{a}_{t,m+1} & \cdots & \bar{a}_{t,h} & \cdots & \bar{a}_{t,n} & \bar{b}_t & x_t \\
0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \bar{a}_{m,m+1} & \cdots & & \cdots & \bar{a}_{m,n} & \bar{b}_m & x_m \\
\hline
\end{array}
$$

se invece $\bar{a}_{tj} < 0$, allora la condizione diventa

$$\bar{c}_j \geq \frac{\bar{c}_h}{-|\bar{a}_{th}|}(-|\bar{a}_{tj}|) \implies \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{tj}|} \geq \frac{\bar{c}_h}{|\bar{a}_{th}|}$$

quindi, la variabile entrante h è individuata da

$$h := \arg \min_{j=1,\dots,n} \{ \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{tj}|} : \bar{a}_{tj} < 0 \}$$

Convergenza

La variazione del valore della funzione obiettivo causata dall'operazione di PIVOT è

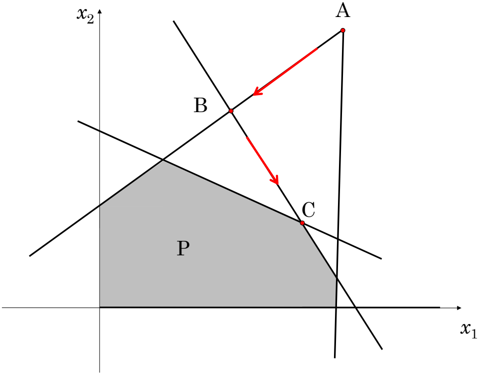
$$\tilde{z} - z = \bar{c}_0 - \tilde{c}_0 = \bar{c}_h \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{th}} = \bar{c}_h |\frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{th}}| \geq 0$$

quindi, se $\bar{c}_h \neq 0$, cioè in assenza di *degenerazione duale*, il valore della soluzione "più che ottima" peggiora ad ogni iterazione

In presenza di degenerazione duale, la convergenza è garantita dall'applicazione di regole di pivoting anticiclaggio, ad esempio la regola di Bland.

Interpretazione geometrica

Geometricamente, invece di esplorare i vertici, il metodo parte da soluzioni di base NON ammissibili "più che ottime" e procede avvicinandosi verso soluzioni di base ammissibili



Esempio

$$\begin{aligned} \min\, & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\, & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

da cui il tableau:

3	4	5	0	0	0
2	2	1	- 1	0	6
1	2	3	0	- 1	5

applicando il simplesso primale si eseguirebbe la FASE I

Esempio

Invece, cambiando segno alle righe si ottiene un tableau iniziale per il simplesso duale

3	4	5	0	0	0
-2	- 2	- 1	1	0	- 6
- 1	- 2	- 3	0	1	- 5

scegliamo x_4 (riga $t = 1$) come var. uscente

var entrante: consideriamo i valori $\bar{a}_{tj} < 0$ e, dovendo mantenere l'ammissibilità duale (cioè $\bar{c} \geq \mathbf{0}$) scegliamo la colonna h per cui:

$$h = \arg\min\{\frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{tj}|} : j \in \{1, \ldots, n\}, \bar{a}_{tj} < 0\}$$

quindi

$$h = \arg\min\{\frac{\bar{c}_1}{|\bar{a}_{11}|} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\bar{c}_2}{|\bar{a}_{12}|} = 2, \quad \frac{\bar{c}_3}{|\bar{a}_{13}|} = 5\} = 1$$

Esempio (cont.)

eseguiamo il $PIVOT(1,1)$ ottenendo il nuovo tableau:

0	1	7/2	3/2	0	-9
1	1	1/2	-1/2	0	3
0	-1	- 5/2	-1/2	1	-2

l'unica riga con $\bar{b}_t < 0$ è $t = 2$, cioè, x_5 è la variabile uscente

per la variabile entrante si ha:

$$h = \arg\min\{\frac{\bar{c}_2}{|\bar{a}_{22}|} = 1, \quad \frac{\bar{c}_3}{|\bar{a}_{23}|} = \frac{7}{5}, \quad \frac{\bar{c}_4}{|\bar{a}_{24}|} = 3\} = 2$$

Esempio (cont.)

eseguiamo quindi il $PIVOT(2,2)$ ottenendo il nuovo tableau:

0	0	1	1	1	-11
1	0	-2	-1	1	1
0	1	5/2	1/2	-1	2

soluzione $(1,2,0,0,0)$ ammissibile primale $\Longrightarrow$ ottima

Se aggiungessimo un vincolo?

supponiamo adesso di aggiungere il vincolo

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

che NON è soddisfatto dalla soluzione ottima.

Aggiungendo la slack è possibile includerlo nel tableau:

0	0	1	1	1	0	-11
1	0	-2	-1	1	0	1
0	1	5/2	1/2	-1	0	2
3	1	1	0	0	1	4

Di nuovo simplesso duale...

mettendo in forma canonica (con la slack in base), si ottiene:

0	0	1	1	1	0	-11
1	0	-2	-1	1	0	1
0	1	5/2	1/2	-1	0	2
0	0	9/2	5/2	**-2**	1	**-1**

essendo $\bar{b}_3 < 0$ non abbiamo ammissibilità primale. Applicando nuovamente il simplesso duale si individua l'elemento di pivot $(3, 5)$ e il nuovo tableau (ottimo):

0	0	13/4	9/4	0	1/2	-23/2
1	0	1/4	1/4	0	1/2	1/2
0	1	1/4	-3/4	0	-1/2	5/2
0	0	-9/4	-5/4	1	-1/2	1/2

nuova sol. ottima
$(1/2, 5/2, 0, 0, 1/2, 0)$