

# Metodo del simplesso duale

- ▶ analisi duale del metodo del simplesso
- ▶ metodo del simplesso duale

Fi 4.6, 4.7

# Analisi del metodo del simplesso

Il metodo del Simplex si applica a problemi in forma standard, quindi le condizioni di ottimalità per una coppia primale-duale di vettori  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  sono:

(i) ammissibilità primale:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

(ii) ammissibilità duale:  $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$

(iii) scarto complementare:  $(\mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$

Infatti, l'altra condizione di scarto complementare  $\mathbf{u}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$  è sempre verificata

# Analisi del metodo del simplesso

Alla generica iterazione, il metodo del simplesso calcola i vettori:

- ▶  $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}) \geq \mathbf{0}$
- ▶  $\mathbf{u}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$
- ▶  $\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T \mathbf{A}$

e si arresta quando  $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$ . Si ha che:

- ▶ la sba corrente è ammissibile per il problema primale: (i) è soddisfatta
- ▶  $(\mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = (\mathbf{c}_B^T - \mathbf{u}^T \mathbf{B})\mathbf{x}_B + (\mathbf{c}_F^T - \mathbf{u}^T \mathbf{F})\mathbf{x}_F = \mathbf{0}$ : la condizione di scarto complementare (iii) è soddisfatta

## Analisi del metodo del simplesso

- ▶ al contrario, la condizione (ii) è soddisfatta solo quando  $\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ , cioè quando **Test\_Opt**  $\rightarrow$  *true* e il metodo si arresta

quindi, durante l'intera esecuzione del metodo, il vettore  $\mathbf{u}$  **non è una soluzione ammissibile del problema duale**, mentre lo diventa alla terminazione

È possibile sviluppare un nuovo algoritmo che rovescia il punto di vista, cioè mantiene  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  tali da soddisfare sempre le condizioni (ii) e (iii), mentre la (i) solo alla terminazione

## Metodo del simplesso duale

Quindi,  $\mathbf{x}$  è una soluzione di base NON ammissibile durante l'intera esecuzione e il metodo si arresta quando ne certifica l'ammissibilità

richiede la disponibilità di un tableau iniziale del tipo:

$x_1$	$\cdots$	$x_j$	$\cdots$	$x_m$	$x_{m+1}$	$\cdots$	$x_h$	$\cdots$	$x_n$		
0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\bar{c}_{m+1}$		$\bar{c}_h$		$\bar{c}_n$	$\bar{c}_0$	$-z$
1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	$\cdots$		$\cdots$	$\bar{a}_{1,n}$	$\bar{b}_1$	$x_1$
0		0		0		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\bar{a}_{t,m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{t,h}$	$\cdots$	$\bar{a}_{t,n}$	$\bar{b}_t$	$x_t$
0		0		0		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	$\cdots$		$\cdots$	$\bar{a}_{m,n}$	$\bar{b}_m$	$x_m$

in cui  $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n \geq 0$  (ammissibilità duale)

## Metodo del simplesso duale

- ▶ se  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m \geq 0$ , allora il tableau è ottimo
- ▶ altrimenti (esiste un valore  $\bar{b}_t < 0$ ):
  - ▶ se  $\bar{a}_{tj} \geq 0, j = 1, \dots, n$ , allora  $\sum_{j=1}^n \bar{a}_{tj} x_j \geq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ; quindi, l'equazione associata alla riga  $t$  del tableau non può essere soddisfatta: problema **inammissibile**
  - ▶ esiste un valore  $\bar{a}_{th} < 0$ : facendo PIVOT sull'elemento  $(t, h)$  il termine  $\bar{b}_t$  diventa positivo
- ▶ la scelta della variabile uscente può ricadere su una qualsiasi delle variabili in base per cui  $\bar{b}_t < 0$  (ricordando la discussione sul ciclaggio)

## Esempio

$$\min 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

s.t.

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

s.t.

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

da cui il tableau:

3	4	5	0	0	0
2	2	1	-1	0	6
1	2	3	0	-1	5

applicando il simplesso primale si eseguirebbe la FASE I

## Esempio

Invece, cambiando segno alle righe si ottiene un tableau iniziale per il simplesso duale

3	4	5	0	0	0
-2	-2	-1	1	0	-6
-1	-2	-3	0	1	-5

scegliamo  $x_4$  (riga  $t = 1$ )

come var. uscente

come scegliere la variabile entrante?

dovendo mantenere l'ammissibilità duale (cioè  $\bar{c} \geq \mathbf{0}$ ), consideriamo esclusivamente i valori  $\bar{a}_{tj} < 0$  e scegliamo la colonna  $h$  per cui:

$$h = \arg \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{tj}|} : j \in \{1, \dots, n\}, \bar{a}_{tj} < 0 \right\}$$



## Esempio (cont.)

quindi:

$$h = \arg \min \left\{ \frac{\bar{c}_1}{|\bar{a}_{11}|} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\bar{c}_2}{|\bar{a}_{12}|} = 2, \quad \frac{\bar{c}_3}{|\bar{a}_{13}|} = 5 \right\} = 1$$

eseguiamo il *PIVOT*(1, 1) ottenendo il nuovo tableau:

0	1	7/2	3/2	0	-9
1	1	1/2	-1/2	0	3
0	-1	-5/2	-1/2	1	-2

l'unica riga con  $\bar{b}_t < 0$  è  $t = 2$ , cioè,  $x_5$  è la variabile uscente.

## Esempio (cont.)

per la variabile entrante si ha:

$$h = \arg \min \left\{ \frac{\bar{c}_2}{|\bar{a}_{12}|} = 1, \quad \frac{\bar{c}_3}{|\bar{a}_{13}|} = \frac{7}{5}, \quad \frac{\bar{c}_4}{|\bar{a}_{14}|} = 3 \right\} = 2$$

eseguiamo quindi il *PIVOT*(2, 2) ottenendo il nuovo tableau:

*PIVOT*(2, 2)

0	0	1	1	1	-11
1	0	-2	-1	1	1
0	1	5/2	1/2	-1	2

soluzione (1, 2, 0, 0, 0) ammissibile primale  $\implies$  ottima

## Se aggiungessimo un vincolo?

supponiamo adesso di aggiungere il vincolo

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

che NON è soddisfatto dalla soluzione ottima.

Aggiungendo la slack è possibile includerlo nel tableau:

0	0	1	1	1	0	-11
1	0	-2	-1	1	0	1
0	1	5/2	1/2	-1	0	2
3	1	1	0	0	1	4

## Di nuovo simplesso duale...

mettendo in forma canonica (con la slack in base), si ottiene:

0	0	1	1	1	0	-11
1	0	-2	-1	1	0	1
0	1	5/2	1/2	-1	0	2
0	0	9/2	5/2	-2	1	-1

essendo  $\bar{b}_3 < 0$  non abbiamo ammissibilità primale. Applicando nuovamente il simplesso duale si individua l'elemento di pivot (3,5) e il nuovo tableau (ottimo):

0	0	13/4	9/4	0	1/2	-23/2
1	0	1/4	1/4	0	1/2	1/2
0	1	1/4	-3/4	0	-1/2	5/2
0	0	-9/4	-5/4	1	-1/2	1/2

nuova sol. ottima  
(1/2, 5/2, 0, 0, 1/2, 0)

## Interpretazione geometrica

Geometricamente, invece di esplorare i vertici, il metodo parte da soluzioni di base NON ammissibili "più che ottime" e procede avvicinandosi verso soluzioni di base ammissibili

