

Interpretazione economica della dualità

- ▶ Interpretazione economica delle variabili duali
- ▶ dualità ed equilibri di mercato
- ▶ applicazioni della dualità alla teoria dei giochi

BT 4.3; Fi 4.4

Interpretazione economica delle variabili duali

Consideriamo un problema $\{\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ e sia \mathbf{x}^* una soluzione ottima non degenere, associata alla base \mathbf{B} . Supponiamo di perturbare il vettore dei termini noti sostituendo \mathbf{b} con $\mathbf{b} + \mathbf{d}$. Allora:

- ▶ essendo \mathbf{B} non degenere si ha $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} > \mathbf{0}$, ma allora anche $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) > \mathbf{0}$ per \mathbf{d} "piccolo"; quindi, per \mathbf{d} sufficientemente piccolo \mathbf{B} è ancora una base ammissibile
- ▶ essendo \mathbf{B} ottima si ha $\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ e ciò non cambia dopo la perturbazione; quindi \mathbf{B} è ancora una base ottima

Interpretazione economica delle variabili duali

- ▶ quindi, il costo ottimo del problema perturbato è

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \mathbf{p}^T (\mathbf{b} + \mathbf{d})$$

in cui \mathbf{p} è una soluzione ottima duale

- ▶ di conseguenza, se l' i -mo requisito varia di d_i , il costo complessivo varia di $p_i d_i$, quindi p_i può essere interpretato come il suo **costo marginale**

Allocazione ottima di risorse

- ▶ m risorse R_1, \dots, R_m
- ▶ n prodotti P_1, \dots, P_n
- ▶ produrre un'unità di P_j richiede una quantità a_{ij} di risorsa R_i

	P_1	\dots	P_j	\dots	P_n
R_1	a_{11}	\dots	a_{1j}	\dots	a_{1n}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
R_i	a_{i1}	\dots	a_{ij}	\dots	a_{in}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
R_m	a_{m1}	\dots	a_{mj}	\dots	a_{mn}

- ▶ le risorse sono limitate: si dispone di b_i unità della risorsa R_i
 $i = 1, \dots, m$
- ▶ c_j prezzo di vendita di P_j , $j = 1, \dots, n$

Modello a risorse condivise

Obiettivo: massimizzazione del ricavo dalle vendite

Variabili decisionali

x_j quantità di prodotto j da produrre, $j = 1, \dots, n$

Modello:

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Mercato delle risorse: produrre o vendere?

Supponiamo che un acquirente sia interessato a comprare le nostre risorse. Se offre p_i Euro per la risorsa i , il ricavo del produttore dalla vendita diretta delle risorse è :

$$b_1p_1 + \dots + b_m p_m$$

Naturalmente, l'interesse dell'acquirente è spendere il meno possibile, cioè minimizzare tale funzione.

Tuttavia, non può "abbassare troppo" l'offerta, altrimenti il produttore non la troverebbe conveniente e preferirebbe utilizzare le risorse per produrre (e vendere) i prodotti finiti.

Modello a risorse condivise

Obiettivo: massimizzazione del ricavo dalle vendite

Variabili decisionali

x_j quantità di prodotto j da produrre, $j = 1, \dots, n$

Modello:

$$z^* = \max c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Valutazione del produttore

In effetti, il produttore ha interesse a vendere le risorse grezze solo se ricava almeno quanto otterrebbe utilizzando le risorse per produrre e vendere i prodotti finiti.

Più precisamente, per ogni prodotto j , il **ricavo che avrebbe vendendo le risorse necessarie a produrre un'unità di P_j** deve superare il prezzo c_j .

Formalmente:

$$a_{1j}p_1 + \dots + a_{mj}p_m \geq c_j$$

Il problema dell'acquirente

Decidere i prezzi di acquisto delle risorse in modo che l'offerta sia attrattiva per il produttore ma spendendo il meno possibile.

$$\begin{aligned}w^* &= \min b_1 p_1 + \dots + b_m p_m \\a_{11} p_1 + \dots + a_{m1} p_m &\geq c_1 \\&\vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \vdots \\a_{1n} p_1 + \dots + a_{mn} p_m &\geq c_n \\p_i &\geq 0, i = 1, \dots, m\end{aligned}$$

L'acquirente risolve il problema duale!

Dualità ed equilibri di mercato

Dualità debole

Per una qualunque offerta $\bar{\mathbf{p}}$ ammissibile per il problema duale si ha $\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{b} \geq z^*$: il produttore ci guadagna (o non perde) rispetto a quanto ricava vendendo i prodotti

Dualità forte $z^* = w^*$ all'ottimo le alternative si equivalgono

Il problema della dieta

Un nutrizionista deve programmare la dieta in modo da garantire una dose minima giornaliera b_i di ciascuno nutriente i (zuccheri, grassi, proteine, etc.) ma spendendo il meno possibile. Per ciascun alimento j sul mercato è noto

- ▶ il costo unitario c_j
- ▶ la qtità a_{ij} di nutriente i contenuta in una unità di j

Definendo la variabile decisionale x_j come la qtità di alimento j :

$$z^* = \min c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Esempio

Alimento	Prezzo Eur/Kg	Zuccheri g/Kg	Grassi g/Kg	Proteine g/Kg	Vitamine g/Kg
pasta	2	300	0	1	12
carne	18	0	110	400	30
uova	5	0	300	280	50
latte	2	70	360	10	4
Dose giornaliera		90	70	50	7

$$\min 2x_p + 18x_c + 5x_u + 2x_l$$

s.t.

$$300x_p + 70x_l \geq 90$$

$$110x_c + 300x_u + 360x_l \geq 70$$

$$x_p + 400x_c + 280x_u + 10x_l \geq 50$$

$$12x_p + 30x_c + 50x_u + 4x_l \geq 7$$

$$x_p, x_c, x_u, x_l \geq 0$$

Un produttore di integratori alimentari

Un'azienda farmaceutica produce nutrienti sintetici e deve decidere il loro prezzo di mercato. I suoi prodotti rappresentano alternative per il nutrizionista agli alimenti tradizionali.

Se p_i è il prezzo del nutriente i , il costo della dieta "sintetica" è

$$b_1p_1 + \dots + b_m p_m$$

Naturalmente, l'azienda è interessata a massimizzare tale funzione. D'altro canto, se i prezzi p_i dei nutrienti sono troppo elevati, il nutrizionista non è incentivato ad acquistarli

Il problema del produttore di integratori alimentari

il **prezzo di "sintesi"** di un'unità di alimento j attraverso i suoi nutrienti è espresso da

$$a_{1j}p_1 + \dots + a_{mj}p_m$$

se questa quantità è superiore al prezzo di acquisto dell'alimento stesso, il nutrizionista non ha alcun vantaggio dall'acquisto degli integratori.

Quindi, per essere concorrenziale, l'azienda deve imporre i vincoli

$$a_{1j}p_1 + \dots + a_{mj}p_m \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Esempio (cont.)

Alimento	Prezzo Eur/Kg	Zuccheri g/Kg	Grassi g/Kg	Proteine g/Kg	Vitamine g/Kg
pasta	2	300	0	1	12
carne	18	0	110	400	30
uova	5	0	300	280	50
latte	2	70	360	10	4
Dose giornaliera		90	70	50	7

siano p_Z, p_G, p_P, p_V i prezzi risp. di zuccheri, grassi, proteine, vitamine

ad es. per "sintetizzare" 1 Kg di pasta (che costa 2 Eur) occorrono 300 g di zuccheri, 1 g di proteine e 12 g di vitamine, quindi:

$$300p_Z + p_P + 12p_V \leq 2$$

Il produttore di integratori alimentari risolve il duale!

$$w^* = \max \sum_{i=1}^m b_i p_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

- ▶ **Dualità debole** Per qualunque scelta ammissibile dei prezzi si ha $\sum_{i=1}^m p_i b_i \leq z^*$: il costo della dieta sintetica è vantaggioso ed il nutrizionista preferirà gli integratori
- ▶ **Dualità forte** $z^* = w^*$ Il mercato tende ad un equilibrio in cui l'acquirente ha due alternative equivalenti

Giochiamo a *Morra!*

- ▶ 2 giocatori (Tullio e Claudia)
- ▶ ciascuno *nasconde* 1 o 2 Euro e *scommette* (a voce alta) su quanto nasconde l'altro
- ▶ quindi, ogni giocatore ha quattro possibili mosse $[x, y]$, $x, y \in [1, 2]$: "nascondi x , scommetti y "
- ▶ se solo uno dei giocatori indovina la scommessa esso vince l'intero ammontare della cifra nascosta
- ▶ in tutti gli altri casi non c'è vincita

Un esempio di partita

- ▶ Claudia ha giocato senza uno schema preciso e, dopo un numero elevato N di tiri, ha giocato c_1 volte la mossa $[1, 1]$, c_2 volte la mossa $[1, 2]$, c_3 volte la mossa $[2, 1]$, c_4 volte la mossa $[2, 2]$
- ▶ diversamente, Tullio ha tirato una moneta e fatto la mossa $[1, 2]$ o $[2, 1]$ in caso risp. di *testa* o *croce*

# tiri	mossa Claudia	mossa Tullio	vincita Tullio
$c_1/2$	$[1, 1]$	$[1, 2]$	-2
$c_1/2$	$[1, 1]$	$[2, 1]$	3
$c_2/2$	$[1, 2]$	$[1, 2]$	-
$c_2/2$	$[1, 2]$	$[2, 1]$	-
$c_3/2$	$[2, 1]$	$[1, 2]$	-
$c_3/2$	$[2, 1]$	$[2, 1]$	-
$c_4/2$	$[2, 2]$	$[1, 2]$	3
$c_4/2$	$[2, 2]$	$[2, 1]$	-4

Analisi

- ▶ vincita totale di Tullio $(c_1 - c_4)/2$ Euro: quindi se Claudia gioca $[2, 2]$ più frequentemente di $[1, 1]$ Tullio perde
- ▶ Tuttavia, nel caso peggiore $c_1 = 0, c_4 = N$ Tullio non perde più di 0.5 Euro a tiro
- ▶ in sostanza, Tullio si protegge da perdite maggiori di 0.5 Euro/tiro semplicemente giocando con la stessa frequenza le mosse $[1, 2]$ e $[2, 1]$ (naturalmente senza alcuno schema comprensibile altrimenti un disastro!)

Tullio può fare di meglio?

Matrice di payoff

- ▶ Rappresentiamo un gioco con 2 giocatori con una matrice \mathbf{A}
- ▶ ad ogni tiro Tullio sceglie una riga $i = 1, \dots, m$ e Claudia una colonna $j = 1, \dots, n$
- ▶ il **profitto** del tiro **per il giocatore riga** è quindi a_{ij} (se negativo, il giocatore riga paga)

la matrice di payoff della morra è quindi:

		Claudia			
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
Tullio	[1, 1]	0	2	-3	0
	[1, 2]	-2	0	0	3
	[2, 1]	3	0	0	-4
	[2, 2]	0	-3	4	0

Strategia

Una strategia di un giocatore consiste nell'assegnare una probabilità a ciascuna mossa e nel demandare la mossa effettiva ad un dispositivo che la seleziona in modo random secondo le probabilità stabilite

- ▶ strategia del giocatore riga: ad ogni tiro la riga i è scelta con probabilità x_i
- ▶ strategia del giocatore colonna: la colonna i è scelta con probabilità y_j
- ▶ x e y hanno componenti non-negative e a somma 1: vettori di questo tipo si dicono **stocastici**

Payoff medio

- ▶ date le strategie \mathbf{x}, \mathbf{y} l'elemento ij è selezionato con probabilità $x_i y_j$
- ▶ il **payoff medio per tiro** è quindi

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

Strategia ottima (giocatore riga)

- ▶ Quindi, quando il giocatore riga adotta la strategia \mathbf{x} , è certo di avere una **vincita media per tiro di almeno**

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

[ad es. Tullio è certo di vincere almeno -0.5 Euro per tiro in media con la strategia $(0, 0.5, 0.5, 0)$]

- ▶ la strategia ottima \mathbf{x} si ottiene quindi risolvendo il problema

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

con \mathbf{x}, \mathbf{y} vettori stocastici

Esempio

Sia $\mathbf{x}^T = (0.3, 0.2, 0.4, 0.1)$ la strategia del giocatore riga; allora

$$\begin{aligned} (0.3 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.1) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} &= \\ &= (0.8 \quad -2.4 \quad -0.5 \quad -1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0.8y_1 + 0.3y_2 - 0.5y_3 - y_4 \end{aligned}$$

quindi il minimo si ottiene con $y_4 = 1$, $y_1, y_2, y_3 = 0$

fra le strategie ottime dell'avversario ce n'è una corrispondente ad una **mossa singola**, corrispondente al coeff. più negativo!

Strategia ottima (giocatore riga)

- ▶ da cui

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \min_{j=1, \dots, n} \mathbf{x}^T \mathbf{A}_j = \min_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i$$

- ▶ di conseguenza, decidere la strategia ottima per il giocatore riga equivale al problema

$$\max \min_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Il giocatore riga risolve un PL!

come sappiamo, il precedente problema ammette una riformulazione lineare:

$$\begin{aligned} & \max z \\ & \text{s.t.} \\ & z - \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Strategia ottima (giocatore colonna)

- ▶ Analogamente, il giocatore colonna è certo di avere una perdita media per tiro di al più

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

- ▶ la strategia ottima \mathbf{y} si ottiene quindi risolvendo il problema

$$\min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

con \mathbf{x}, \mathbf{y} vettori stocastici

- ▶ simmetricamente a quanto osservato prima, \mathbf{c}' è sempre una risposta ottima del giocatore riga che consiste di una singola mossa:

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$$

Strategia ottima (giocatore colonna)

di conseguenza, decidere la strategia ottima per il giocatore colonna equivale al problema:

$$\begin{array}{ll} \min & w \\ \text{s.t.} & \\ & w - \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ & y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & w \\ \text{s.t.} & \\ & w - \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ & y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array}$$

il duale del problema del giocatore riga!!

Teorema min-max

Il teorema di dualità forte implica quindi il seguente risultato:

Per ogni matrice \mathbf{A} di dimensioni $m \times n$ esistono un vettore riga stocastico $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m$ ed un vettore colonna stocastico $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{y} = \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{y}^*$$

in cui \mathbf{x} e \mathbf{y} variano fra tutti i possibili vettori stocastici.

il valore ottimo $v = w^* = z^*$ è detto *valore del gioco*

Giochi a somma zero

Adottando la strategia \mathbf{x}^* il giocatore riga è sicuro di vincere almeno v Euro per tiro in media

simmetricamente, adottando la strategia \mathbf{y}^* il giocatore colonna è sicuro di perdere al più v Euro per tiro in media

i giochi per cui $v = 0$ sono detti *a somma zero* (la morra è fra questi)