Interpretazione economica della dualità

- Interpretazione economica delle variabili duali
- Interpretazione economica del problema duale nei problemi di allocazione risorse e miscelazione
- Applicazioni della dualità alla teoria dei giochi

BT 4.3; Fi 4.4

Interpretazione economica delle variabili duali

Consideriamo un problema $\{\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ e sia $\mathbf{x}^*$ una soluzione ottima non degenere, associata alla base $\mathbf{B}$.
Supponiamo di perturbare il vettore dei termini noti sostituendo $\mathbf{b}$ con $\mathbf{b} + \mathbf{d}$. Allora:

- essendo $\mathbf{B}$ non degenere si ha $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} > \mathbf{0}$, ma allora anche $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) > \mathbf{0}$ per $\mathbf{d}$ "piccolo"; quindi, per $\mathbf{d}$ sufficientemente piccolo $\mathbf{B}$ è ancora una base ammissibile

- essendo $\mathbf{B}$ ottima si ha $\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ e ciò non cambia dopo la perturbazione; quindi $\mathbf{B}$ è ancora una base ottima

Interpretazione economica delle variabili duali

- quindi, il costo ottimo del problema perturbato è

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b}+\mathbf{d}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{b}+\mathbf{d})$$

  in cui $\mathbf{p}$ è una soluzione ottima duale

- di conseguenza, se l'i-mo requisito varia di d_i, il costo complessivo varia di $p_i d_i$, quindi p_i può essere interpretato come il suo **costo marginale**

Allocazione di risorse: produrre o vendere?

Consideriamo un modello a risorse condivise: $x_1, \ldots, x_n$ quantità da produrre di ciascun prodotto. Come sempre, detto c_j il prezzo a cui vendiamo il prodotto j, il nostro obiettivo è massimizzare il ricavo dalle vendite:

$$
\begin{aligned}
\max c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\
a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
a_{21} x_1 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\
\vdots \qquad \ldots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \\
x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Allocazione di risorse: produrre o vendere?

Supponiamo che un acquirente sia interessato a comprare le nostre risorse, al prezzo p_i per la risorsa i. Il ricavo dalla vendita diretta delle risorse è quindi:

$$b_1 p_1 + \ldots + b_m p_m$$

quantità che l'acquirente cerca di minimizzare.
D'altro canto, tale opzione suscita il nostro interesse solo se ricaviamo almeno quanto quello che otterremmo utilizzando le risorse per produrre e vendendo il prodotto.
Più precesamente, per ogni prodotto j, il ricavo che avremmo vendendo le risorse necessarie a produrre una sua unità deve superare il prezzo c_j:

$$a_{1j} p_1 + \ldots + a_{mj} p_m \geq c_j$$

L’acquirente risolve il problema duale

Decidere i prezzi di acquisto per le risorse in modo che l’offerta sia conveniente per noi (altrimenti rifiuteremmo) ma spendendo il meno possibile.

$$
\begin{aligned}
\min b_1 p_1 + \ldots + b_m p_m \\
a_{11} p_1 + \ldots + a_{m1} p_m \geq c_1 \\
\vdots \qquad \ldots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{1n} p_1 + \ldots + a_{mn} p_m \geq c_n \\
p_i \geq 0, i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

Dualità debole $\Longrightarrow$ una qualunque offerta concorrenziale ci farebbe guadagnare non meno che vendere i prodotti

Dualità forte $\Longrightarrow$ all’ottimo le alternative si equivalgono

Il problema della dieta

Un nutrizionista deve programmare la dieta per una squadra sportiva, in modo da garantire un certo apporto b_i di ciascuno dei nutrienti fondamentali (zuccheri, grassi, proteine, etc.).
Per ciascun alimento j sul mercato è noto

- il costo unitario c_j
- la qtità a_{ij} di nutriente i contenuta in una unità di j

Determinare una dieta (qtità x_j di alimento $\forall j$) di costo minimo

$$
\begin{aligned}
& z^* = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Esempio

Alimento	Eur/Kg	Zuccheri g/Kg	Grassi g/Kg	Proteine g/Kg	Vitamine g/Kg
pasta	2	300	0	1	12
carne	18	0	110	400	30
uova	5	0	300	280	50
latte	6	70	360	10	4
dose giornaliera		90	70	50	7

Il problema del produttore di integratori alimentari

Un'azienda farmaceutica produce "direttamente" i nutrienti e deve decidere il loro prezzo di immissione sul mercato. I suoi prodotti rappresentano alternative per il nutrizionista agli alimenti tradizionali.

Possiamo stimare il ricavo massimo dell'azienda?

Se p_i è il prezzo del nutriente i, il costo della dieta "sintetica" è

$$b_1 p_1 + \ldots + b_m p_m$$

Naturalmente, l'azienda è interessata a massimizzare tale funzione. D'altro canto, se i prezzi p_i dei nutrienti sono troppo elevati, il nutrizionista non è incentivato ad acquistarli

Il problema del produttore di integratori alimentari

il prezzo di "sintesi" di un'unità di alimento j attraverso i suoi nutrienti è espresso da

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i$$

se questa quantità è superiore al prezzo di acquisto dell'alimento stesso, il nutrizionista non ha alcun vantaggio dall'acquisto degli integratori.

Quindi, per essere concorrenziale, l'azienda deve imporre i vincoli

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \leq c_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

Esempio (cont.)

siano p_Z, p_G, p_P, p_V i prezzi risp. di zuccheri, grassi, proteine, vitamine

ad es. per "sintetizzare" 1 Kg di pasta (che costa 2 Eur) occorrono 300 g di zuccheri, 1 g di proteine e 12 g di vitamine, quindi:

$$300p_Z + p_P + 12p_V \leq 2$$

Il produttore di integratori alimentari risolve il duale!

$$
\begin{aligned}
& w^* = \max \sum_{i=1}^{m} b_i p_i \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \leq c_j, \qquad j = 1, \dots, n \\
& p_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, m
\end{aligned}
\tag{2}
$$

- per qualunque scelta ammissibile dei prezzi si ha $\sum_{i=1}^{m} p_i b_i \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$: il costo della dieta sintetica è vantaggioso ed il nutrizionista preferirà gli integratori

- per il teorema della dualità forte, $z^* = w^*$: il mercato tende ad un equilibrio in cui l'acquirente ha due alternative equivalenti

Giochiamo a *Morra*!

- 2 giocatori (Tullio e Claudia)
- ciascuno *nasconde* 1 o 2 Euro e *scommette* (a voce alta) su quanto nasconde l'altro
- quindi, ogni giocatore ha quattro possibili mosse $[x, y],\ x, y \in [1, 2]$: "nascondi x, scommetti y"
- se solo uno dei giocatori indovina la scommessa esso vince l'intero ammontare della cifra nascosta
- in tutti gli altri casi non c'é vincita

Un esempio di partita

- Claudia ha giocato senza uno schema preciso e, dopo un numero elevato N di tiri, ha giocato c_1 volte la mossa $[1,1]$, c_2 volte la mossa $[1,2]$, c_3 volte la mossa $[2,1]$, c_4 volte la mossa $[2,2]$
- diversamente, Tullio ha tirato una moneta e fatto la mossa $[1,2]$ o $[2,1]$ in caso risp. di *testa* o *croce*

# tiri	mossa Claudia	mossa Tullio	vincita Tullio
$c_1/2$	$[1,1]$	$[1,2]$	-2
$c_1/2$	$[1,1]$	$[2,1]$	3
$c_2/2$	$[1,2]$	$[1,2]$	-
$c_2/2$	$[1,2]$	$[2,1]$	-
$c_3/2$	$[2,1]$	$[1,2]$	-
$c_3/2$	$[2,1]$	$[2,1]$	-
$c_4/2$	$[2,2]$	$[1,2]$	3
$c_4/2$	$[2,2]$	$[2,1]$	-4

Analisi

- vincita totale di Tullio $(c_1 - c_4)/2$ Euro: quindi se Claudia gioca $[2, 2]$ più frequentemente di $[1, 1]$ Tullio perde
- Tuttavia, nel caso peggiore $c_1 = 0, c_4 = N$ Tullio non perde più di 0.5 Euro a tiro
- in sostanza, Tullio si protegge da perdite maggiori di 0.5 Euro/tiro semplicemente giocando con la stessa frequenza le mosse $[1, 2]$ e $[2, 1]$ (naturalmente senza alcuno schema comprensibile altrimenti un disastro!)

Tullio può fare di meglio?

Matrice di payoff

- Rappresentiamo un gioco con 2 giocatori con una matrice $\mathbf{A}$
- ad ogni tiro Tullio sceglie una riga $i = 1, \ldots, m$ e Claudia una colonna $j = 1, \ldots, n$
- il profitto del tiro per il giocatore riga è quindi a_{ij} (se negativo, il giocatore riga paga)

la matrice di payoff della morra è quindi:

		Claudia			
		$[1,1]$	$[1,2]$	$[2,1]$	$[2,2]$
	$[1,1]$	0	2	-3	0
Tullio	$[1,2]$	-2	0	0	3
	$[2,1]$	3	0	0	-4
	$[2,2]$	0	-3	4	0

Strategia

Una strategia di un giocatore consiste nell'assegnare una probabilità a ciascuna mossa e nel demandare la mossa effettiva ad un dispositivo che la seleziona in modo random secondo le probabilità stabilite

- strategia del giocatore riga: ad ogni tiro la riga i è scelta con probabilità x_i
- strategia del giocatore colonna: la colonna i è scelta con probabilità y_j
- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ hanno componenti non-negative e a somma 1: vettori di questo tipo si dicono **stocastici**

Payoff medio

- date le strategie $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ l'elemento ij è selezionato con probabilità $x_i y_j$

- il payoff medio per tiro è quindi

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

Strategia ottima (giocatore riga)

- Quindi, quando il giocatore riga adotta la strategia $\mathbf{x}$, è certo di avere una vincita media per tiro di almeno

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

  [ad es. Tullio è certo di vincere almeno -0.5 Euro per tiro in media con la strategia $(0, 0.5, 0.5, 0)$]
- la stategia ottima $\mathbf{x}$ si ottiene quindi risolvendo il problema

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

  con $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vettori stocastici

Esempio

Sia $\mathbf{x}^T = (0.3, 0.2, 0.4, 0.1)$ la strategia del giocatore riga; allora

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8 & -2.4 & -0.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0.8y_1 + 0.3y_2 - 0.5y_3 - y_4$$

quindi il minimo si ottiene con $y_4 = 1$, $y_1, y_2, y_3 = 0$

fra le strategie ottime dell'avversario ce n'è una corrispondente ad una mossa singola, corrispondente al coeff. più negativo!

Strategia ottima (giocatore riga)

- da cui

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \min_{j=1,\ldots,n} \mathbf{x}^T \mathbf{A}_j = \min_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$$

- di conseguenza, decidere la strategia ottima per il giocatore riga equivale al problema

$$\max \min_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m$$

Il giocatore riga risolve un PL!

come sappiamo, il precedente problema ammette una riformulazione lineare:

$$\max z$$

s.t.

$$z - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \leq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m$$

Strategia ottima (giocatore colonna)

- Analogamente, il giocatore colonna è certo di avere una perdita media per tiro di al più

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

- la stategia ottima $\mathbf{y}$ si ottiene quindi risolvendo il problema

$$\min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

  con $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vettori stocastici

- simmetricamente a quanto osservato prima, c' è sempre una risposta ottima del giocatore riga che consiste di una singola mossa:

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \max_{i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

Strategia ottima (giocatore colonna)

di conseguenza, decidere la strategia ottima per il giocatore colonna equivale al problema:

$$
\begin{aligned}
\min \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \\
\text{s.t.} \\
\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\
y_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\min w \\
\text{s.t.} \\
w - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\
y_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

il duale del problema del giocatore riga!!

Teorema min-max

Il teorema di dualità forte implica quindi il seguente risultato:

Per ogni matrice $\mathbf{A}$ di dimensioni $m \times n$ esistono un vettore riga stocastico $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m$ ed un vettore colonna stocastico $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{y} = \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{y}^*$$

in cui $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ variano fra tutti i possibili vettori stocastici.

il valore ottimo $v = w^* = z^*$ è detto *valore del gioco*

Giochi a somma zero

Adottando la strategia $\mathbf{x}^*$ il giocatore riga è sicuro di vincere almeno v Euro per tiro in media

simmetricamente, adottando la strategia $\mathbf{y}^*$ il giocatore colonna è sicuro di perdere al più v Euro per tiro in media

i giochi per cui $v = 0$ sono detti *a somma zero* (la morra è fra questi)