

Richiami di algebra lineare e geometria di \mathbb{R}^n

- ▶ combinazione lineare, conica e convessa
- ▶ spazi lineari
- ▶ insiemi convessi, funzioni convesse

rif. BT 1.5

Combinazione lineare, conica, affine, convessa

Definizione

Un vettore $y \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione lineare* dei vettori x^1, \dots, x^k se esistono k moltiplicatori reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che

$$y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$$

Se $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$ la combinazione è detta *conica*

Se $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ la combinazione è detta *affine*

Una combinazione conica ed affine si dice *convessa*

Esempio

Dati $x^1 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Il punto $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di x^1, x^2 ?

Equivale a risolvere un **sistema di equazioni lineari**:

$$\begin{cases} 7/2\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 + 3/2\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

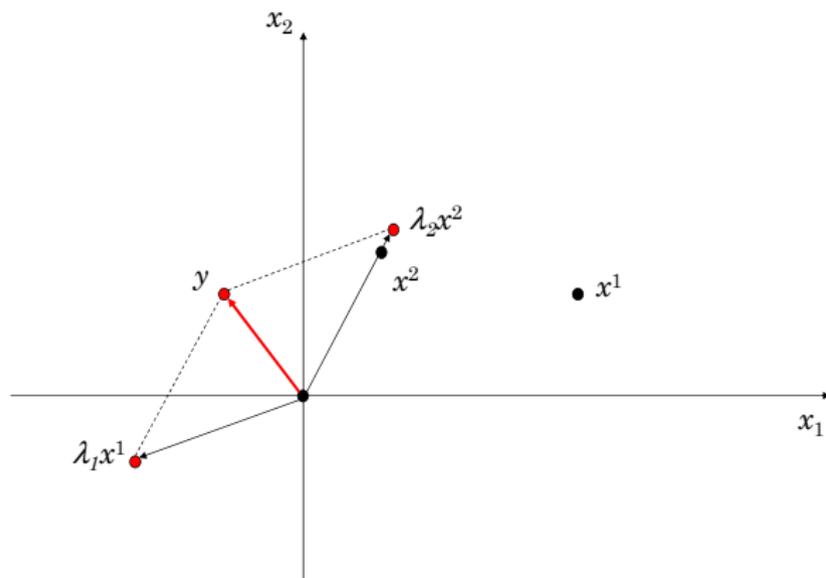
da cui: $\lambda_1 = -10/17$, $\lambda_2 = 18/17$

quindi: $y = -10/17 \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix} + 18/17 \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geometricamente

$$x^1 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 x^1 = \begin{pmatrix} -35/17 \\ -10/17 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2.06 \\ -0.59 \end{pmatrix}, \lambda_2 x^2 = \begin{pmatrix} 18/17 \\ 27/17 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1.06 \\ 1.59 \end{pmatrix}$$

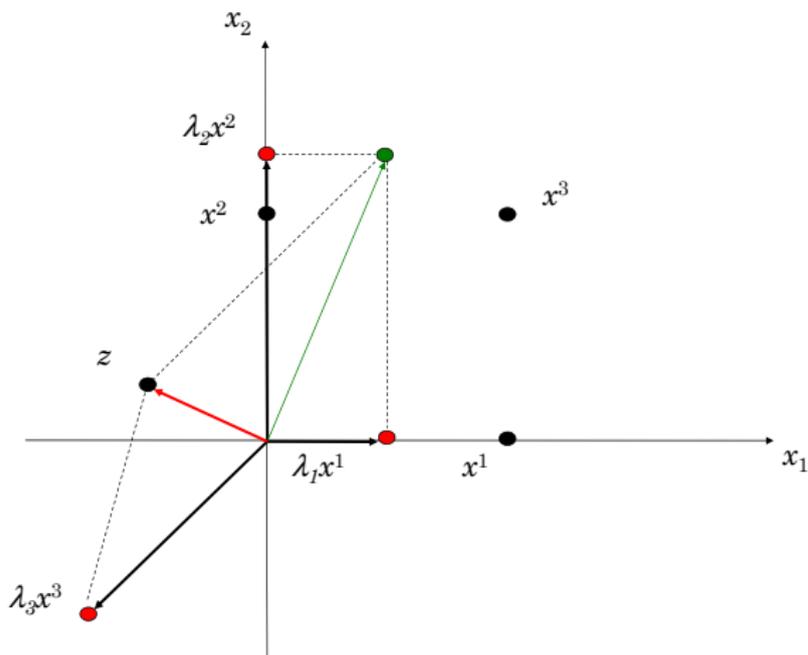


Generare punti per combinazione lineare

Dati $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

scegliendo $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 5/4$, $\lambda_3 = -1$

otteniamo: $z = 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5/4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$



Involucro lineare, sottospazi

Definizione

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice *involucro lineare* di S o *sottospazio generato da S* l'insieme $\text{lin}(S)$ di tutte le combinazioni lineari di elementi di S

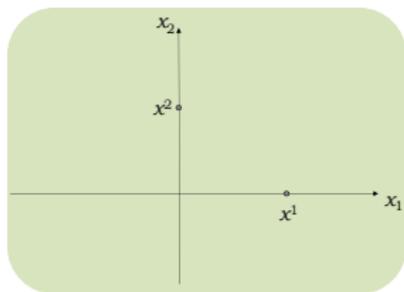
Definizione

Un insieme $L \subseteq \mathbb{R}^n$ è uno *spazio lineare* (o *sottospazio* di \mathbb{R}^n) se e solo se qualsiasi combinazione lineare di ogni sottoinsieme finito di elementi di L appartiene a L , cioè $\text{lin}(L) = L$

Proprietà Ogni spazio lineare contiene il vettore nullo.

Esempi

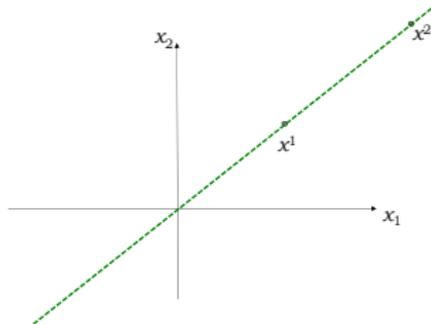
$$S = \left\{ x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$$y = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{lin}(S) = \mathbb{R}^2$$

$$S = \left\{ x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$



$$y = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{lin}(S) \text{ retta per } (0, 0), x^1, x^2$$

Indipendenza lineare

Definizione

Un insieme $S = \{x^1, \dots, x^k\}$ di punti di \mathbb{R}^n si dice *linearmente indipendente* se non esistono k numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli tali che $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i = 0_n$

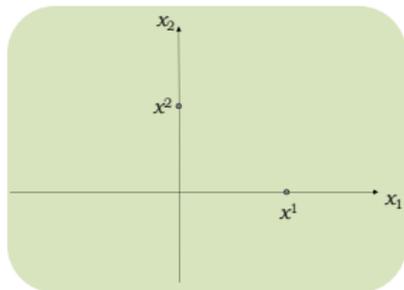
Un insieme $S = \{x^1, \dots, x^k\}$ di punti di \mathbb{R}^n non linearmente indipendente si dice *dipendente*

Proprietà

- ▶ Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente, ogni suo sottoinsieme è linearmente indipendente (cioè, S non contiene alcun sottoinsieme linearmente dipendente)
- ▶ L'insieme $\{0_n\}$ è linearmente dipendente. Quindi, il vettore 0_n non appartiene ad alcun insieme linearmente indipendente

Esempi (continua)

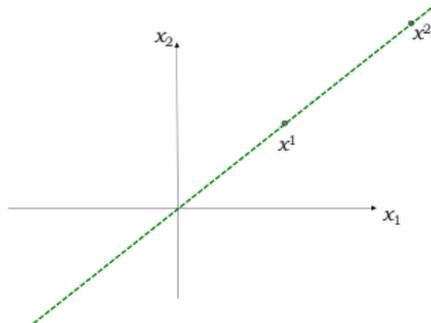
$$S = \left\{ x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
 S lin. indipendente

$$S = \left\{ x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \lambda_1 = -2\lambda_2$
 S lin. dipendente

Basi

Definizione

Dato un sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce base di S una collezione B di vettori linearmente indipendenti tale che $S = \text{lin}(B)$

Proprietà Tutte le basi di un dato sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^n$ hanno lo stesso numero di elementi

Definizione

Il numero di elementi di una base di un sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^n$ detto *dimensione* del sottospazio ($\text{dim}(S)$)

Nota

- ▶ $\text{dim}(\mathbb{R}^n) = n$
- ▶ i sottospazi 1-dimensionali sono rette per l'origine, 2-dimensionali piani per l'origine, ...

Proprietà delle basi

- ▶ ogni sottospazio proprio $S \subset \mathbb{R}^n$ ha $\dim(S) < n$
- ▶ Se S è un sottospazio proprio di \mathbb{R}^n allora $\exists a \in \mathbb{R}^n$ ortogonale a tutti gli elementi di S (diciamo $\perp S$)
- ▶ se $\dim(S) = m < n$ allora esistono $n - m$ vettori linearmente indipendenti ortogonali a S

Teorema

Dati i vettori x^1, \dots, x^K , sia $S = \text{lin}(\{x^1, \dots, x^K\})$ tale che $\dim(S) = m$. Allora:

- (i) esiste una base di S composta da m fra i vettori di x^1, \dots, x^K
- (ii) se $k \leq m$ e x^1, \dots, x^k sono linearmente indipendenti, possiamo formare una base di S scegliendo $m - k$ fra i vettori x^{k+1}, \dots, x^K e aggiungendoli a x^1, \dots, x^k

Rappresentazione rispetto ad una base

Definizione

Data una base $B = \{x^1, \dots, x^r\}$ di un sottospazio S ed un generico vettore $y \in S$ si definisce *rappresentazione di y rispetto a B* il vettore $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ tale che $y = \sum_{i=1}^r \lambda_i x^i$

Funzioni lineari

Definizione

Dati due spazi lineari $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e $T \subseteq \mathbb{R}^m$, si dice *funzione lineare* un funzione $f : S \rightarrow T$ tale che, per ogni coppia $x, y \in S$ ed un qualunque scalare $k \in \mathbb{R}$, soddisfi:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(kx) = kf(x)$$

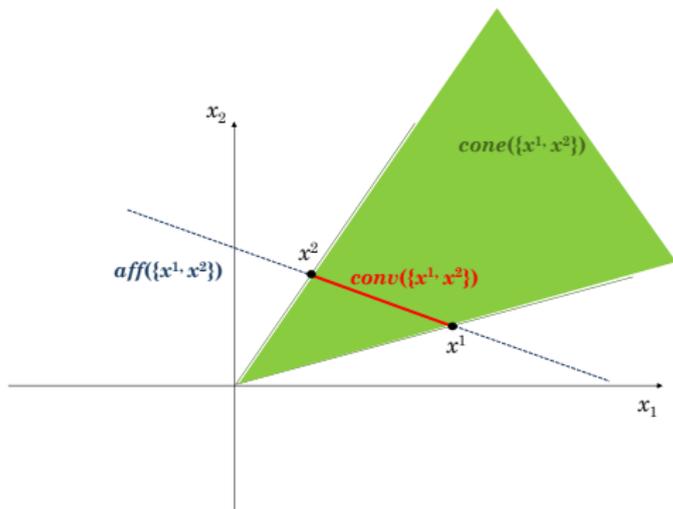
Ogni funzione lineare f da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m si può rappresentare con una matrice A dimensioni $m \times n$, cioè, $y = Ax, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

Nel caso $m = 1$: $f(x) = c^T x$, con c vettore di \mathbb{R}^n

Involucro conico, affine, convesso

Si dice *involucro conico* [*affine*, *convesso*] di $S \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme $\text{cone}(S)$ [$\text{aff}(S)$, $\text{conv}(S)$] di tutte le combinazioni coniche [affini, convesse] di elementi di S

Esempio. $x^1 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. si ha: $\text{lin}(S) = \mathbb{R}^2$



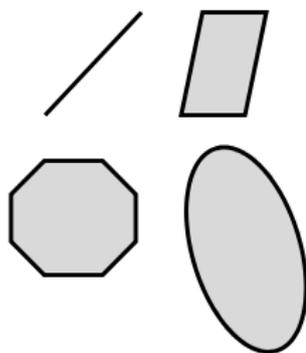
Insiemi convessi

Definizione

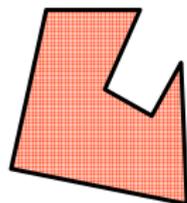
Un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se, per ogni $x, y \in S$ ed ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in S$$

Esempi



convessi



non convesso

Intersezione di insiemi convessi

Teorema

Siano $S, T \subset \mathbb{R}^n$ insiemi convessi. Allora $S \cap T$ un insieme convesso.

Dimostrazione Siano $x, y \in S \cap T$. Comunque scelto un $\lambda \in [0, 1]$ si ha che:

$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in S$, in quanto S convesso

$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in T$, in quanto T convesso

Quindi, $z \in S \cap T$, ovvero $S \cap T$ convesso.



Funzioni convesse

Definizione

Una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un insieme convesso $S \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice *convessa* in S se per ogni $x, y \in S$ ed ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \text{ con } z = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

