

Richiami di algebra lineare e geometria di \mathbb{R}^n

- ▶ combinazione lineare, conica e convessa
- ▶ spazi lineari
- ▶ insiemi convessi, funzioni convesse

rif. BT 1.5

Combinazione lineare, conica, affine, convessa

Definizione

Un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$ se esistono k moltiplicatori reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}^i$$

Se $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$ la combinazione è detta *conica*

Se $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ la combinazione è detta *affine*

Una combinazione conica ed affine si dice *convessa*

Esempio

Dati $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Il punto $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$?

Equivale a risolvere un **sistema di equazioni lineari**:

$$\begin{cases} 7/2\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 + 3/2\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

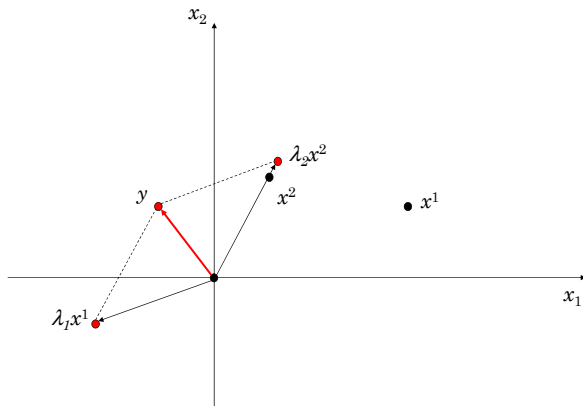
da cui: $\lambda_1 = -10/17$, $\lambda_2 = 18/17$

quindi: $\mathbf{y} = -10/17 \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix} + 18/17 \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geometricamente

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -35/17 \\ -10/17 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2.06 \\ -0.59 \end{pmatrix}, \lambda_2 \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 18/17 \\ 27/17 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1.06 \\ 1.59 \end{pmatrix}$$

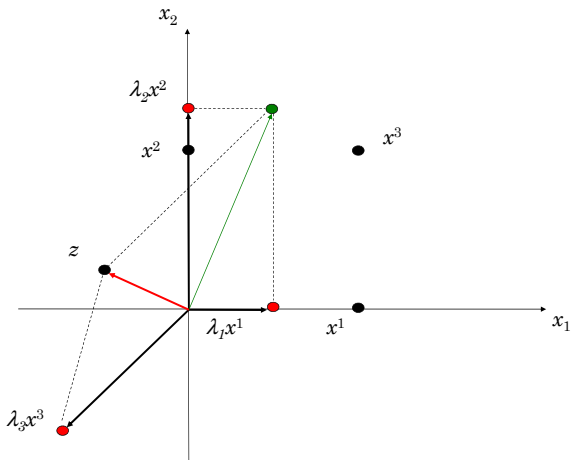


Generare punti per combinazione lineare

Dati $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

scegliendo $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 5/4$, $\lambda_3 = -1$

otteniamo: $\mathbf{z} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5/4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$



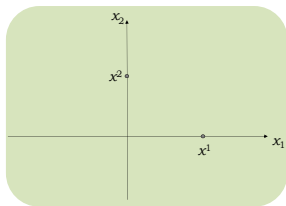
Involucro lineare, sottospazi

Definizione

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice *involucro lineare* di S o *sottospazio generato da S* l'insieme $\text{lin}(S)$ di tutte le combinazioni lineari di elementi di S

Esempi

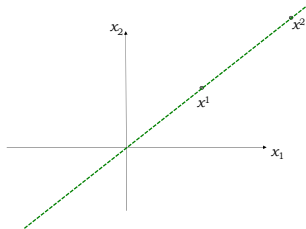
$$S = \left\{ \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\mathbf{y} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{lin}(S) = \mathbb{R}^2$$

$$S = \left\{ \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\mathbf{y} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{lin}(S) \text{ retta per } (0, 0), \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$$

Indipendenza lineare

Definizione

Un insieme $S = \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$ di punti di \mathbb{R}^n si dice *linearmente indipendente* se non esistono k numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli tali che $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0}_n$

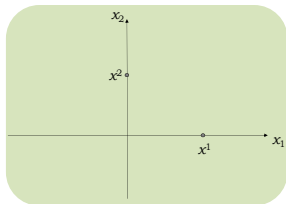
Un insieme $S = \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$ di punti di \mathbb{R}^n non linearmente indipendente si dice *dipendente*

Proprietà

- ▶ Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente, ogni suo sottoinsieme è linearmente indipendente (cioè, S non contiene alcun sottoinsieme linearmente dipendente)
- ▶ L'insieme $\{\mathbf{0}_n\}$ è linearmente dipendente. Quindi, il vettore $\mathbf{0}_n$ non appartiene ad alcun insieme linearmente indipendente

Esempi (continua)

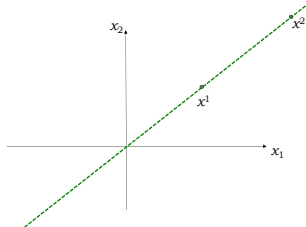
$$S = \left\{ x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
 S lin. indipendente

$$S = \left\{ x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \lambda_1 = -2\lambda_2$
 S lin. dipendente

Spazi lineari

Definizione

Un insieme $L \subseteq \mathbb{R}^n$ è uno *spazio lineare* (o *sottospazio* di \mathbb{R}^n) se e solo se qualsiasi combinazione lineare di ogni sottoinsieme finito di elementi di L appartiene a L , cioè $\text{lin}(L) = L$

Proprietà Ogni spazio lineare contiene il vettore nullo.

Basi

Definizione

Dato un sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce base di S una collezione B di vettori linearmente indipendenti tale che $S = \text{lin}(B)$

Proprietà Tutte le basi di un dato sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^n$ hanno lo stesso numero di elementi

Definizione

Il numero di elementi di una base di un sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^n$ detto *dimensione* del sottospazio ($\text{dim}(S)$)

Nota

- ▶ $\text{dim}(\mathbb{R}^n) = n$
- ▶ i sottospazi 1-dimensionali sono rette per l'origine, 2-dimensionali piani per l'origine, ...

Proprietà delle basi

- ▶ ogni sottospazio proprio $S \subset \mathbb{R}^n$ ha $\dim(S) < n$
- ▶ Se S è un sottospazio proprio di \mathbb{R}^n allora $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ortogonale a tutti gli elementi di S (diciamo $\perp S$)
- ▶ se $\dim(S) = m < n$ allora esistono $n - m$ vettori linearmente indipendenti ortogonali a S

Teorema

Dati i vettori $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^K$, sia $S = \text{lin}(\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^K\})$ tale che $\dim(S) = m$. Allora:

- (i) esiste una base di S composta da m fra i vettori di $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^K$
- (ii) se $k \leq m$ e $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$ sono linearmente indipendenti, possiamo formare una base di S scegliendo $m - k$ fra i vettori $\mathbf{x}^{k+1}, \dots, \mathbf{x}^K$ e aggiungendoli a $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$

Rappresentazione rispetto ad una base

Definizione

Data una base $B = \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r\}$ di un sottospazio S ed un generico vettore $\mathbf{y} \in S$ si definisce *rappresentazione di \mathbf{y} rispetto a B* il vettore $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ tale che $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{x}^i$

Funzioni lineari

Definizione

Dati due spazi lineari $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e $T \subseteq \mathbb{R}^m$, si dice *funzione lineare* un funzione $f : S \rightarrow T$ tale che, per ogni coppia $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ ed un qualunque scalare $k \in \mathbb{R}$, soddisfi:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

$$f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$$

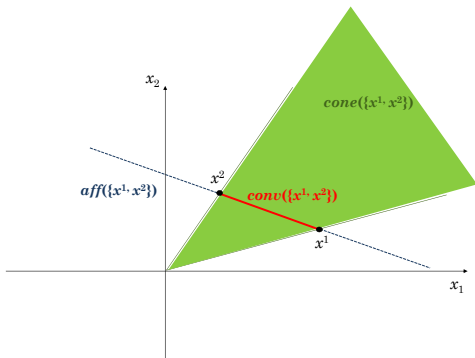
Ogni funzione lineare f da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m si può rappresentare con una matrice A dimensioni $m \times n$, cioè, $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

Nel caso $m = 1$: $f(\mathbf{x}) = c^T \mathbf{x}$, con c vettore di \mathbb{R}^n

Involucro conico, affine, convesso

Si dice *involucro conico* [*affine*, *convesso*] di $S \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme $\text{cone}(S)$ [$\text{aff}(S)$, $\text{conv}(S)$] di tutte le combinazioni coniche [affini, convesse] di elementi di S

Esempio. $x^1 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. si ha: $\text{lin}(S) = \mathbb{R}^2$



Insiemi convessi

Definizione

Siano \mathbf{x}, \mathbf{y} due punti di \mathbb{R}^n . L'insieme dei punti \mathbf{z} ottenuti come

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$$

per $\lambda \in [0, 1]$, si dice *segmento* (chiuso) di estremi \mathbf{x}, \mathbf{y} .

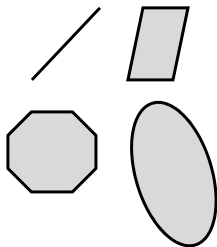
Definizione

Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ il segmento di estremi \mathbf{x}, \mathbf{y} appartiene interamente ad S , cioè

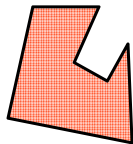
$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in S$$

per $\lambda \in [0, 1]$

Esempi



convessi



non convesso

Intersezione di insiemi convessi

Teorema

Siano $S, T \subset \mathbb{R}^n$ insiemi convessi. Allora $S \cap T$ un insieme convesso.

Dimostrazione Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \cap T$. Comunque scelto un $\lambda \in [0, 1]$ si ha che:

$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in S$, in quanto S convesso

$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in T$, in quanto T convesso

Quindi, $\mathbf{z} \in S \cap T$, ovvero $S \cap T$ convesso.



Funzioni convesse

Definizione

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *convessa* su S se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ ed ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$$

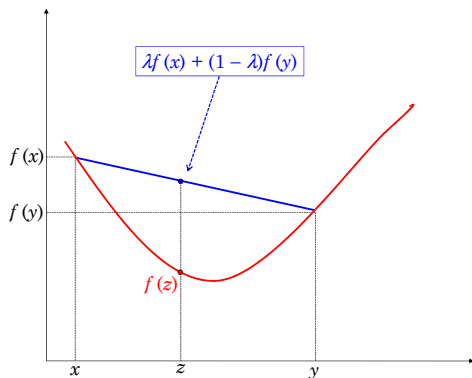
se la disuguaglianza è stretta, cioè se

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) < \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$$

con $\lambda \in (0, 1)$, allora la funzione si dice *strettamente convessa*

La definizione è ben posta in quanto $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in S$ per $\lambda \in [0, 1]$, grazie alla convessità di S

Graficamente



Quindi, una funzione convessa "giace al di sotto delle sue corde"
(vale anche se $n > 1$)

Esempi di funzioni convesse

- ▶ x^2
- ▶ x
- ▶ e^x
- ▶ $-\log x$
- ▶ $\max\{-x, 2x\}$
- ▶ $\|x\|$

Se $f(\mathbf{x}) = c^T \mathbf{x}$ è lineare, si ha

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) &= c^T (\lambda \mathbf{x}) + c^T (1 - \lambda) \mathbf{y} = \\ &= \lambda c^T \mathbf{x} + (1 - \lambda) c^T \mathbf{y} = \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

quindi, una funzione lineare è convessa (ma non strettamente)

Funzioni concave

Definizione

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *concava* su S se $-f$ è convessa su S . In altre parole, f è concava se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ ed ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \geq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y})$$