Problema di programmazione convessa

- funzioni convesse vs. insiemi convessi
- minimi locali e globali
- problema di programmazione convessa

rif. Fi 1.1

Funzioni convesse vs. insiemi convessi

Teorema Sia

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}, \qquad \text{con } g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Se le funzioni g_i, $i \in \{i, \ldots, m\}$, sono convesse, allora l'insieme X è convesso.

Dimostrazione
Definendo $X_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0\}$, osserviamo che $X = \cap_{i=1}^n X_i$.
Quindi, per dimostrare la convessità di X, basta dimostrare che ciascuno degli X_i è convesso.

Consideriamo due punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i$ ed il generico punto $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$, $\lambda \in [0, 1]$, appartenente al segmento di estremi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Funzioni convesse vs. insiemi convessi

Essendo g_i convessa, si ha

$$g_i(\mathbf{z}) \leq \lambda g_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda) g_i(\mathbf{y})$$

inoltre, $g_i(\mathbf{x}) \leq 0, g_i(\mathbf{y}) \leq 0$. Quindi:

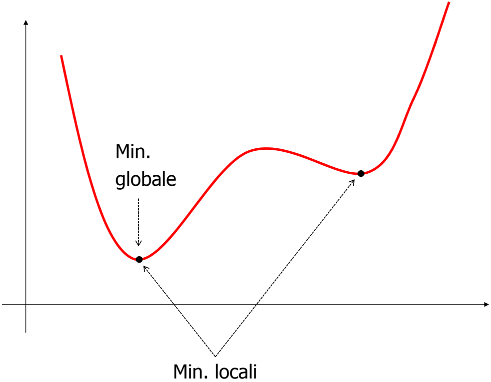
$$g_i(\mathbf{z}) \leq \lambda g_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda) g_i(\mathbf{y}) \leq 0$$

In altre parole, $\mathbf{z} \in X_i$, che implica la convessità di X_i. $\square$

Minimi locali e globali

$\hat{\mathbf{x}}$ si dice punto di *minimo locale* di f su X se esiste $\epsilon > 0$ tale che $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in X$ per cui $||\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|| \leq \epsilon$.

$\hat{\mathbf{x}}$ si dice punto di *minimo globale* se $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in X$



Programmazione convessa

Definizione

Un problema $\min f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice di *programmazione convessa* se X è convesso e $f(\mathbf{x})$ è convessa su X.

Teorema

In un problema di programmazione convessa ogni punto di minimo locale è anche di minimo globale.

Dimostrazione

Sia $\hat{\mathbf{x}}$ un punto di minimo locale di f su X. Allora,

$$\exists \epsilon > 0 \text{ t.c. } f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{z}), \text{ per ogni } \mathbf{z} \in I_\epsilon(\hat{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in X : ||\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|| \leq \epsilon\}$$

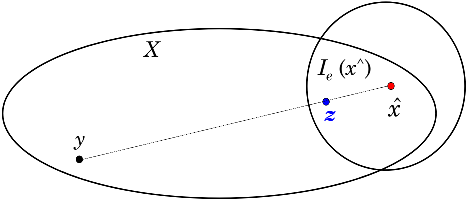
dimostriamo che $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{y} \in X$.

Dimostrazione (continua)

Preso un qualunque $\mathbf{y} \in X$, consideriamo un punto $\mathbf{z}$ sul segmento congiungente $\hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{y}$:

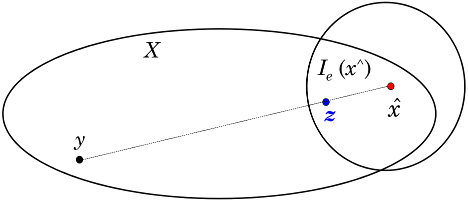
$$\mathbf{z} = \lambda\hat{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$$

data la convessità di X, si ha $\mathbf{z} \in X$. Inoltre, scegliamo $\lambda \simeq 1$ in modo che $\mathbf{z} \in I_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$.



Quindi, $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{z})$.

Dimostrazione (continua)



Per l'ipotesi di convessità di f, si ha:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{z}) = f(\lambda\hat{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\hat{\mathbf{x}}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$$

ovvero:

$$(1-\lambda) f(\hat{\mathbf{x}}) \leq (1-\lambda) f(\mathbf{y})$$

dividendo per $(1-\lambda)$ (che è > 0) si ottiene $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{y})$ $\square$

Esercizio

Esercizio Mostrare che un problema $\min f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ in cui f è convessa in $\mathbb{R}^n$ ed X non è convesso ammette punti di minimo locale