

Problema di programmazione convessa

- ▶ funzioni convesse vs. insiemi convessi
- ▶ minimi locali e globali
- ▶ problema di programmazione convessa

rif. Fi 1.1

Funzioni convesse vs. insiemi convessi

Teorema Sia

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m\}, \quad \text{con } g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Se le funzioni g_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, sono convesse, allora l'insieme X è convesso.

Dimostrazione

Ovviamente $X = \bigcap_{i=1}^n X_i$, con $X_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0\}$. Quindi basta dimostrare che ciascuno degli X_i è convesso.

Consideriamo due punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i$ e sia $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$, $\lambda \in [0, 1]$. Essendo g_i convessa e $g_i(\mathbf{x}) \leq 0, g_i(\mathbf{y}) \leq 0$ si ha:

$$g_i(\mathbf{z}) \leq \lambda g_i(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) g_i(\mathbf{y}) \leq 0$$

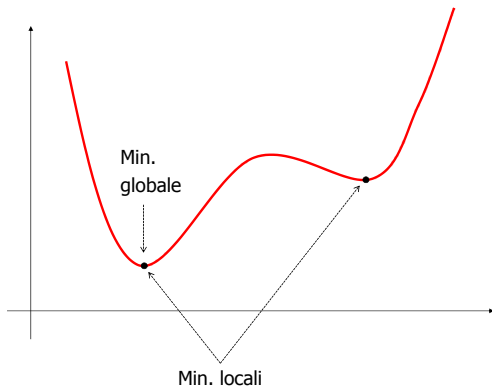
Quindi, $\mathbf{z} \in X_i$.



Minimi locali e globali

$\hat{\mathbf{x}}$ si dice punto di *minimo locale* di f su X se esiste $\epsilon > 0$ tale che $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in X$ per cui $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \epsilon$.

$\hat{\mathbf{x}}$ si dice punto di *minimo globale* se $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in X$



Programmazione convessa

Definizione

Un problema $\min f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice di *programmazione convessa* se X è convesso e $f(\mathbf{x})$ è convessa in X .

Teorema

In un problema di programmazione convessa ogni punto di minimo locale è anche di minimo globale.

Dimostrazione

Sia $\hat{\mathbf{x}}$ un punto di minimo locale di f su X . Allora,

$$\exists \epsilon > 0 \text{ t.c. } f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{z}), \text{ per ogni } \mathbf{z} \in I_\epsilon(\hat{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \epsilon\}$$

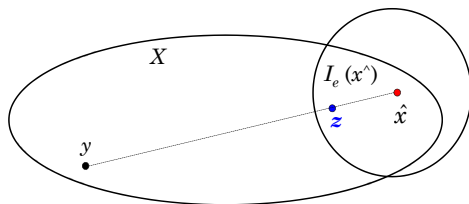
dimostriamo che $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{y} \in X$.

Dimostrazione (continua)

Preso un qualunque $\mathbf{y} \in X$, consideriamo un punto \mathbf{z} sul segmento congiungente $\hat{\mathbf{x}}$ e \mathbf{y} :

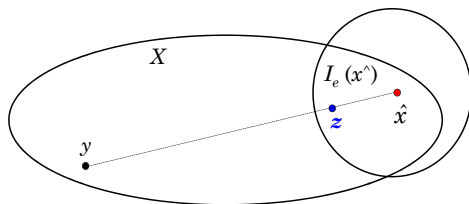
$$\mathbf{z} = \lambda \hat{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$$

e scegliamo $\lambda \simeq 1$ in modo che $\mathbf{z} \in I_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$.



Quindi, $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{z})$.

Dimostrazione (continua)



Per l'ipotesi di convessità di f , si ha:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{z}) = f(\lambda \hat{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\hat{\mathbf{x}}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y})$$

ovvero:

$$(1 - \lambda)f(\hat{\mathbf{x}}) \leq (1 - \lambda)f(\mathbf{y})$$

dividendo per $(1 - \lambda)$ (che è > 0) si ottiene $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{y})$



Esercizio

Esercizio Mostrare che un problema $\min f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ in cui f è convessa in \mathbb{R}^n ed X non è convesso ammette punti di minimo locale