Geometria della programmazione lineare

- poliedri
- punti estremi, vertici, soluzioni di base
- esistenza di punti estremi

rif. Fi 3.1; BT 2.1, 2.2, 2.5

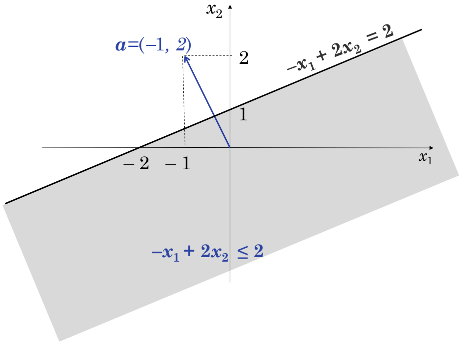
Iperpiani, semispazi

Definizione

Sia $\mathbf{a}$ un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$ e b uno scalare.

l'insieme $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$ è detto *iperpiano*

l'insieme $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b\}$ è detto *semispazio*



Un semispazio è chiuso e convesso (per la convessità della funzione $\mathbf{a}^T\mathbf{x} - b$) e l'iperpiano coincide con la sua frontiera

Poliedri, politopi

Definizione

Si definisce *poliedro* ogni insieme che <u>può essere descritto</u> come l'intersezione di un numero finito di semispazi

quindi:

un poliedro è a sua volta un insieme chiuso e convesso

la regione ammissibile di un problema di PL è un poliedro

Definizione

Un poliedro limitato è detto *politopo*

Esercizio

Per ciascuno dei seguenti insiemi, stabilire se è un poliedro:

(i) $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 - 8x + 15 \leq 0$

(ii) l'insieme vuoto

In entrambi i casi la risposta è affermativa:

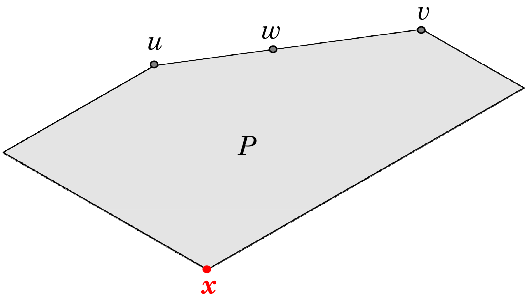
(i) la funzione è una parabola di vertice $(4, -1)$ che assume valori ≤ 0 nell'intervallo $[3, 5]$

(ii) l'insieme vuoto può essere descritto da $\{x : x \leq 0, x \geq 1\}$

Punti estremi

Definizione

Sia P un poliedro. Un vettore $\mathbf{x}^* \in P$ è un *punto estremo* di P se non esistono due punti distinti $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$ diversi da $\mathbf{x}^*$, ed uno scalare $\lambda \in (0, 1)$ tali che $\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$

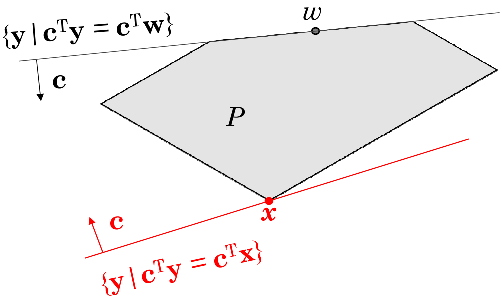


x punto estremo, w no

Vertici

Definizione

Sia P un poliedro. Un vettore $\mathbf{x}^* \in P$ è un *vertice* di P se esiste un qualche $\mathbf{c}$ tale che $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T\mathbf{y}$, per ogni $\mathbf{y} \in P, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$



quindi $\mathbf{x}^*$ è un vertice di P se e solo se P giace su un lato di un iperpiano $\{\mathbf{y} : \mathbf{c}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*\}$ che interseca P solo in $\mathbf{x}^*$

Algebricamente...

Si consideri un sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &\geq b_i, && i \in M_1 \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &\leq b_i, && i \in M_2 \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &= b_i, && i \in M_3 \end{aligned}$$

Definizione

Se un vettore $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* = b_i$ per qualche $i \in M_1, M_2, M_3$, il corrispondente vincolo si dice *attivo* in $\mathbf{x}^*$.

Soluzioni di base

Definizione
Il vettore $\mathbf{x}^*$ si dice *soluzione di base* se

(i) tutti i vincoli di uguaglianza sono attivi (i.e. $\mathbf{x}^*$ è ammissibile risp. ad essi)

(ii) fra tutti i vincoli attivi in $\mathbf{x}^*$ ce ne sono n (i cui vettori $\mathbf{a}_i$ sono) linearmente indipendenti

Una soluzione di base $\mathbf{x}^*$ che soddisfa <u>tutti</u> i vincoli è detta *soluzione di base ammissibile* (sba)

Osservazione Se il numero m di vincoli che definiscono un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è minore di n non esistono soluzioni di base

Esempio

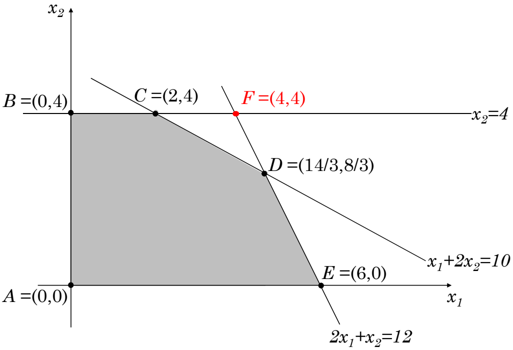
1] $x_2 \leq 4$

2] $x_1 + 2x_2 \leq 10$

3] $2x_1 + x_2 \leq 12$

4] $x_1 \geq 0$

5] $x_2 \geq 0$



in ciascuno dei punti A, B, C, D, E, F sono attivi due vincoli: se sono linearmente indipendenti il punto è una soluzione di base

Algebricamente

Teorema
Sia $I = \{i | \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = b_i\}$ l'insieme dei vincoli attivi in $\mathbf{x}^*$. Allora, esistono n vettori $\{\mathbf{a}_i | i \in I\}$ linearmente indipendenti se e solo se il sistema di equazioni $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, i \in I$ ha un'unica soluzione.

È facile verificare che ciò è vero per tutti i punti A, B, C, D, E, F.

Ad es. per C si ha $I = \{1, 2\}$ ed il sistema di equazioni è:

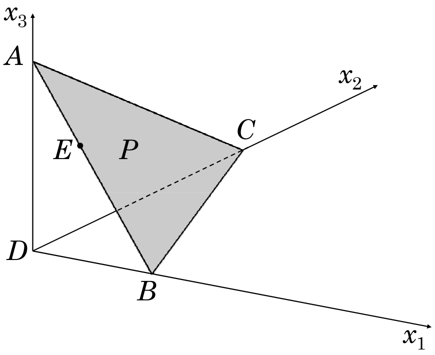
$$\begin{cases} x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$$

di cui $C = (2, 4)$ è soluzione unica

quindi A, B, C, D, E, F sono soluzioni di base.
Inoltre, A, B, C, D, E sono **sba** mentre F è **non ammissibile**

Esempio

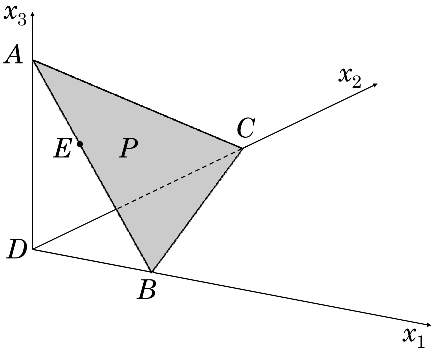
$$P = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$



- A, B, C soluzioni di base ammissibili
- D non è sol. di base (non soddisfa il vincolo $=$)
- E è ammissibile ma non sol. di base

Esempio

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$



- in questo caso anche D è soluzione di base.

Quindi, il fatto che un punto sia o no soluzione di base dipende dalla rappresentazione del poliedro

Equivalenza punti estremi-vertici-sba

Teorema
Sia P un poliedro non vuoto e sia $\mathbf{x}^* \in P$. Le tre affermazioni seguenti sono equivalenti:

(a) $\mathbf{x}^*$ è un vertice

(b) $\mathbf{x}^*$ è un punto estremo

(c) $\mathbf{x}^*$ è una soluzione di base ammissibile

Dimostrazione Dimostriamo il risultato mostrando che
$(a) \implies (b) \implies (c) \implies (a)$
Senza perdere di generalità assumiamo che tutti i vincoli di disuguaglianza abbiano la forma $\mathbf{a}_i^T \geq b_i$

Dimostrazione ($(a) \implies (b)$)

Dimostrazione $(a) \implies (b)$
Se $\mathbf{x}^*$ è vertice, allora esiste $\mathbf{c}$ tale che $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T\mathbf{y}$, per ogni $\mathbf{y} \in P, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}$

Quindi, presi due punti generici $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in P$, entrambi diversi da $\mathbf{x}^*$, risulta $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T\mathbf{w}$, $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T\mathbf{z}$. Di conseguenza, per ogni $\lambda \in (0,1)$ si ha:

$$\mathbf{c}^T(\lambda\mathbf{w}+(1-\lambda)\mathbf{z}) = \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{w}+(1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{z} > \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x}^*+(1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$$

cioè

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T(\lambda\mathbf{w} + (1-\lambda)\mathbf{z})$$

quindi, $\mathbf{x}^* \neq \lambda\mathbf{w} + (1-\lambda)\mathbf{z}$, cioè, $\mathbf{x}^*$ non è esprimibile come combinazione convessa (stretta) di $\mathbf{w}, \mathbf{z}$

Dimostrazione ($(b) \implies (c)$)

Supponiamo che $\mathbf{x}^*$ non sia sba e dimostriamo che non è punto estremo.

$\mathbf{x}^* \in P$ implica che tutti i vincoli di uguaglianza sono attivi in $\mathbf{x}^*$. Quindi, se $\mathbf{x}^*$ non è sba, non esistono n vettori $\mathbf{a}_i$ linearmente indipendenti, con $i \in I = \{i | \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = b_i\}$.

Di conseguenza:

i vettori $\mathbf{a}_i$, $i \in I$, giacciono in un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^n$ e (vedi Lez 2) esiste un qualche vettore $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \setminus 0_n$ ortogonale a tutti i vettori $\mathbf{a}_i$, cioè tale che

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0, \text{ per ogni } i \in I$$

Dimostrazione (cont.)

Scegliamo un $\epsilon > 0$ piccolo e costruiamo i vettori:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \epsilon\mathbf{d}, \qquad \mathbf{z} = \mathbf{x}^* - \epsilon\mathbf{d}$$

- per $i \in I$ si ha: $\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* + \epsilon\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* = b_i$
- per $i \notin I$ risulta $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* > b_i$: quindi, se ϵ è sufficientemente piccolo, $\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* + \epsilon\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} > b_i$.

Quindi, se ϵ è sufficientemente piccolo, $\mathbf{y} \in P$. Analogamente si dimostra che $\mathbf{z} \in P$.

Ma abbiamo anche $\mathbf{x}^* = (\mathbf{y} + \mathbf{z})/2$, cioè $\mathbf{x}^*$ non è punto estremo

Dimostrazione ($(c) \implies (a)$)

$\mathbf{x}^*$ è sba. Poniamo $\mathbf{c} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i$. Quindi abbiamo:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = \sum_{i \in I} b_i$$

Inoltre, per ogni $\mathbf{x} \in P$ ed ogni i risulta $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i$ e

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq \sum_{i \in I} b_i \qquad (1)$$

Dimostrazione (cont.)

In sostanza, $\mathbf{x}^*$ è una soluzione ottima per il problema di minimizzare $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ su P.

Si osservi infine che la disequazione (1) è soddisfatta all'uguaglianza se e solo se $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$ per ogni $i \in I$.

Dato che $\mathbf{x}^*$ è una sba, ci sono n vincoli attivi in $\mathbf{x}^*$ linearmente indipendenti, cioè $\mathbf{x}^*$ è l'unica soluzione del sistema $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i, i \in I$ (teorema precedente).

Segue che $\mathbf{x}^*$ è l'unica soluzione ottima di $\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ su P, cioè è un vertice di P. $\square$

Conseguenze

- la proprietà di essere punto estremo (o vertice) è puramente geometrica e lo stesso vale per le sba
- si ricordi che, al contrario, la proprietà di essere soluzione di base dipende dalla rappresentazione del poliedro

Corollario

Dato un numero finito m di disuguaglianze lineari, il numero di soluzioni di base o di sba (e quindi di vertici) è finito.

- Ogni soluzione di base è definita da n vincoli attivi linearmente indipendenti, che definiscono un unico punto
- quindi, diverse soluzioni di base corrispondono a diversi insiemi di n vincoli linearmente indipendenti
- quindi, numero di sba $\leq \binom{m}{n}$

Esistenza di punti estremi

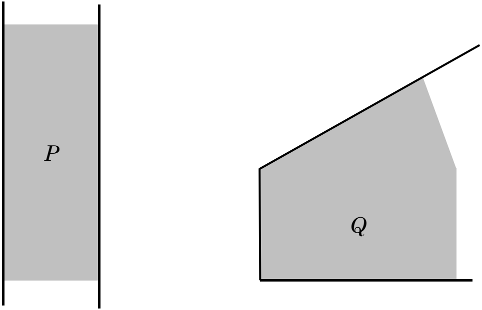
Non tutti i poliedri hanno punti estremi. Ad es, se la matrice $\mathbf{A}$ ha meno di n righe, il poliedro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ non ha sba.

In generale si ha:

Definizione
Si dice che un poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ *contiene una retta* se esiste un vettore $\mathbf{x} \in P$ ed un vettore non nullo $\mathbf{d}$ tali che $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \in P$ per ogni scalare λ

Teorema
Un poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ ha almeno un punto estremo se e solo se non contiene una retta

Esempi



P contiene una retta e non ha vertici
Q non contiene una retta ed ha vertici

Osservazione Un poliedro in forma standard non contiene mai una retta e quindi ha almeno un punto estremo