

# Geometria della programmazione lineare

- ▶ poliedri
- ▶ punti estremi, vertici, soluzioni di base
- ▶ esistenza di punti estremi

rif. Fi 3.1; BT 2.1, 2.2, 2.5

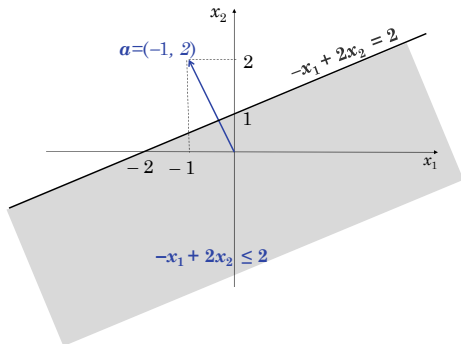
# Iperpiani, semispazi

## Definizione

Sia  $\mathbf{a}$  un vettore non nullo di  $\mathbb{R}^n$  e  $b$  uno scalare.

l'insieme  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$  è detto *iperpiano*

l'insieme  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b\}$  è detto *semispazio*



Un semispazio è **chiuso** e **convesso** (per la convessità della funzione  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} - b$ ) e l'iperpiano coincide con la sua frontiera

# Poliedri, politopi

## Definizione

Si definisce *poliedro* ogni insieme che può essere descritto come l'intersezione di un numero finito di semispazi

quindi:

un poliedro è a sua volta un insieme chiuso e convesso

la regione ammissibile di un problema di PL è un poliedro

## Definizione

Un poliedro limitato è detto *politopo*

## Esercizio

Per ciascuno dei seguenti insiemi, stabilire se è un poliedro:

- (i)  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $x^2 - 8x + 15 \leq 0$
- (ii) l'insieme vuoto

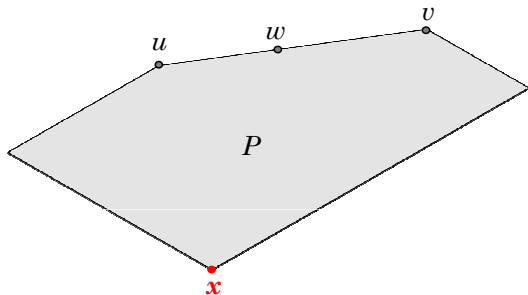
In entrambi i casi la risposta è affermativa:

- (i) la funzione è una parabola di vertice  $(4, -1)$  che assume valori  $\leq 0$  nell'intervallo  $[3, 5]$
- (ii) l'insieme vuoto può essere descritto da  $\{x : x \leq 0, x \geq 1\}$

# Punti estremi

## Definizione

Sia  $P$  un poliedro. Un vettore  $\mathbf{x} \in P$  è un *punto estremo* di  $P$  se non esistono due punti distinti  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$  diversi da  $\mathbf{x}$ , ed uno scalare  $\lambda \in (0, 1)$  tali che  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z}$

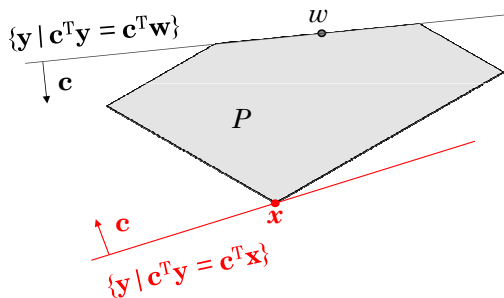


$x$  punto estremo,  $w$  no

# Vertici

## Definizione

Sia  $P$  un poliedro. Un vettore  $\mathbf{x} \in P$  è un *vertice* di  $P$  se esiste un qualche  $\mathbf{c}$  tale che  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} < \mathbf{c}^T \mathbf{y}$ , per ogni  $\mathbf{y} \in P, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}$



quindi  $\mathbf{x}$  è un vertice di  $P$  se e solo se  $P$  giace su un lato di un iperpiano  $\{\mathbf{y} : \mathbf{c}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}\}$  che interseca  $P$  solo in  $\mathbf{x}$

## Algebricamente...

Si consideri un sistema

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1$$

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2$$

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3$$

### Definizione

Se un vettore  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  soddisfa  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = b_i$  per qualche  $i \in M_1, M_2, M_3$ , il corrispondente vincolo si dice *attivo* in  $\mathbf{x}^*$ .

# Soluzioni di base

## Definizione

Il vettore  $\mathbf{x}^*$  si dice *soluzione di base* se

- (i) tutti i vincoli di uguaglianza sono attivi (i.e.  $\mathbf{x}^*$  è ammissibile risp. ad essi)
- (ii) fra tutti i vincoli attivi in  $\mathbf{x}^*$  ce ne sono  $n$  (i cui vettori  $\mathbf{a}_i$  sono) linearmente indipendenti

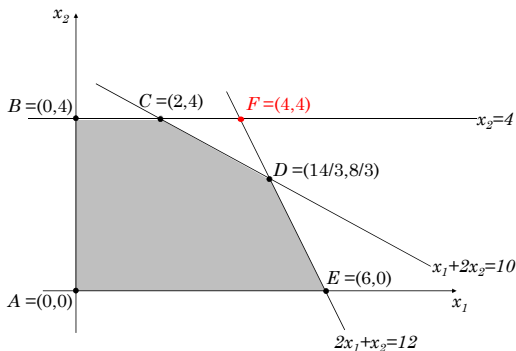
Una soluzione di base  $\mathbf{x}^*$  che soddisfa tutti i vincoli è detta *soluzione di base ammissibile* (sba)

**Osservazione** Se il numero  $m$  di vincoli che definiscono un poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  è minore di  $n$  non esistono soluzioni di base



## Esempio

- 1]  $x_2 \leq 4$
- 2]  $x_1 + 2x_2 \leq 10$
- 3]  $2x_1 + x_2 \leq 12$
- 4]  $x_1 \geq 0$
- 5]  $x_2 \geq 0$



in ciascuno dei punti  $A, B, C, D, E, F$  sono attivi due vincoli: se sono linearmente indipendenti il punto è una soluzione di base

# Algebricamente

## Teorema

Sia  $I = \{i | \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = b_i\}$  l'insieme dei vincoli attivi in  $\mathbf{x}^*$ . Allora, esistono  $n$  vettori  $\{\mathbf{a}_i | i \in I\}$  linearmente indipendenti se e solo se il sistema di equazioni  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, i \in I$  ha un'unica soluzione.

È facile verificare che ciò è vero per tutti i punti  $A, B, C, D, E, F$ .

Ad es. per  $C$  si ha  $I = \{1, 2\}$  ed il sistema di equazioni è:

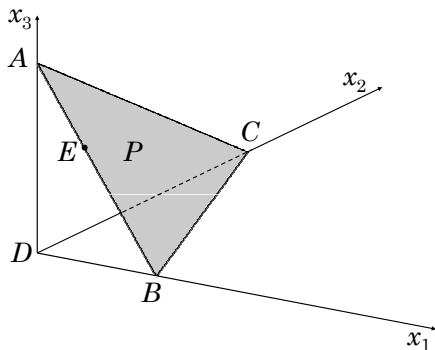
$$\begin{cases} x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \quad \text{di cui } C = (2, 4) \text{ è soluzione unica}$$

quindi  $A, B, C, D, E, F$  sono soluzioni di base.

Inoltre,  $A, B, C, D, E$  sono **sb** mentre  $F$  è **non ammissibile**

## Esempio

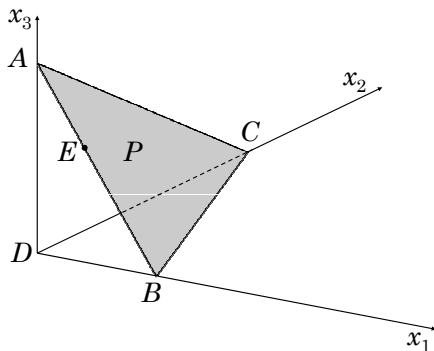
$$P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$



- ▶  $A, B, C$  soluzioni di base ammissibili
- ▶  $D$  non è sol. di base (non soddisfa il vincolo  $=$ )
- ▶  $E$  è ammissibile ma non sol. di base

## Esempio

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$



- ▶ in questo caso anche  $D$  è soluzione di base.

Quindi, il fatto che un punto sia o no soluzione di base dipende dalla rappresentazione del poliedro

# Equivalenza punti estremi-vertici-sba

## Teorema

Sia  $P$  un poliedro non vuoto e sia  $\mathbf{x}^* \in P$ . Le tre affermazioni seguenti sono equivalenti:

(a)  $\mathbf{x}^*$  è un vertice

(b)  $\mathbf{x}^*$  è un punto estremo

(c)  $\mathbf{x}^*$  è una soluzione di base ammissibile

**Dimostrazione** Dimostriamo il risultato mostrando che

(a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c)  $\implies$  (a)

Senza perdere di generalità assumiamo che tutti i vincoli di disuguaglianza abbiano la forma  $\mathbf{a}_i^T \geq b_i$

## Dimostrazione $((a) \implies (b))$

### Dimostrazione $(a) \implies (b)$

Se  $\mathbf{x}^*$  è vertice, allora esiste  $\mathbf{c}$  tale che  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T \mathbf{y}$ , per ogni  $\mathbf{y} \in P, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$

Quindi, presi due punti generici  $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in P$ , entrambi diversi da  $\mathbf{x}^*$ , risulta  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T \mathbf{z}$ . Di conseguenza, per ogni  $\lambda \in (0, 1)$  si ha:

$$\mathbf{c}^T(\lambda \mathbf{w} + (1-\lambda)\mathbf{z}) = \lambda \mathbf{c}^T \mathbf{w} + (1-\lambda)\mathbf{c}^T \mathbf{z} > \lambda \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

cioè

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T(\lambda \mathbf{w} + (1-\lambda)\mathbf{z})$$

quindi,  $\mathbf{x}^* \neq \lambda \mathbf{w} + (1-\lambda)\mathbf{z}$ , cioè,  $\mathbf{x}^*$  non è esprimibile come combinazione convessa (stretta) di  $\mathbf{w}, \mathbf{z}$

## Dimostrazione ((b) $\implies$ (c))

Supponiamo che  $\mathbf{x}^*$  non sia sba e dimostriamo che non è punto estremo.

$\mathbf{x}^* \in P$  implica che tutti i vincoli di uguaglianza sono attivi in  $\mathbf{x}^*$ . Quindi, se  $\mathbf{x}^*$  non è sba, **non** esistono  $n$  vettori  $\mathbf{a}_i$  linearmente indipendenti, con  $i \in I = \{i | \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = b_i\}$ .

Di conseguenza:

i vettori  $\mathbf{a}_i$  giacciono in un sottospazio proprio di  $\mathbb{R}^n$  e (vedi Lez 2) esiste un qualche vettore  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \setminus 0_n$  ortogonale a tutti i vettori  $\mathbf{a}_i$ , cioè tale che

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0, \text{ per ogni } i \in I$$

## Dimostrazione (cont.)

Scegliamo un  $\epsilon > 0$  piccolo e costruiamo i vettori:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \epsilon \mathbf{d}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{x}^* - \epsilon \mathbf{d}$$

- ▶ per  $i \in I$  si ha:  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* + \epsilon \mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = b_i$
- ▶ per  $i \notin I$  risulta  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* > b_i$ : quindi, se  $\epsilon$  è sufficientemente piccolo,  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* + \epsilon \mathbf{a}_i^T \mathbf{d} > b_i$ .

Quindi, se  $\epsilon$  è sufficientemente piccolo,  $\mathbf{y} \in P$ . Analogamente si dimostra che  $\mathbf{z} \in P$ .

Ma abbiamo anche  $\mathbf{x}^* = (\mathbf{y} + \mathbf{z})/2$ , cioè  $\mathbf{x}^*$  non è punto estremo



## Dimostrazione ((c) $\implies$ (a))

$\mathbf{x}^*$  è sba. Poniamo  $\mathbf{c} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i$ . Quindi abbiamo:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = \sum_{i \in I} b_i$$

Inoltre, per ogni  $\mathbf{x} \in P$  ed ogni  $i$  risulta  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i$  e

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq \sum_{i \in I} b_i \tag{1}$$

## Dimostrazione (cont.)

In sostanza,  $\mathbf{x}^*$  è una soluzione ottima per il problema di minimizzare  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  su  $P$ .

Si osservi infine che la disequazione (1) è soddisfatta all'uguaglianza se e solo se  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$  per ogni  $i \in I$ .

Dato che  $x^*$  è una sba, ci sono  $n$  vincoli attivi in  $\mathbf{x}^*$  linearmente indipendenti, cioè  $x^*$  è l'unica soluzione del sistema  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, i \in I$  (teorema precedente).

Segue che  $\mathbf{x}^*$  è l'unica soluzione ottima di  $\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  su  $P$ , cioè è un vertice di  $P$ . □

# Conseguenze

- ▶ la proprietà di essere punto estremo (o vertice) è puramente geometrica e lo stesso vale per le sba
- ▶ si ricordi che, al contrario, la proprietà di essere soluzione di base dipende dalla rappresentazione del poliedro

## Corollario

Dato un numero finito  $m$  di disuguaglianze lineari, il numero di soluzioni di base o di sba (e quindi di vertici) è finito.

- ▶ Ogni soluzione di base è definita da  $n$  vincoli attivi linearmente indipendenti, che definiscono un unico punto
- ▶ quindi, diverse soluzioni di base corrispondono a diversi insiemi di  $n$  vincoli linearmente indipendenti
- ▶ quindi, numero di sba  $\leq \binom{m}{n}$

## Esistenza di punti estremi

Non tutti i poliedri hanno punti estremi. Ad es, se la matrice  $\mathbf{A}$  ha meno di  $n$  righe, il poliedro  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$  non ha sba.

In generale si ha:

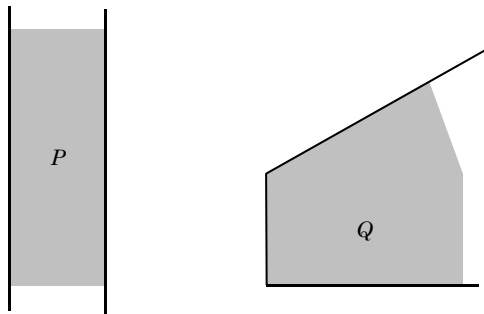
### Definizione

Si dice che un poliedro  $P \subset \mathbb{R}^n$  *contiene una retta* se esiste un vettore  $\mathbf{x} \in P$  ed un vettore non nullo  $\mathbf{d}$  tali che  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d} \in P$  per ogni scalare  $\lambda$

### Teorema

Un poliedro  $P \subset \mathbb{R}^n$  ha almeno un punto estremo se e solo se non contiene una retta

## Esempi



$P$  contiene una retta e non ha vertici  
 $Q$  non contiene una retta ed ha vertici

**Osservazione** Un poliedro in forma standard non contiene mai una retta e quindi ha almeno un punto estremo