

Il teorema fondamentale della PL

- ▶ rappresentazione di poliedri
- ▶ teorema fondamentale della PL
- ▶ caso limitato: ottimalità dei punti estremi

rif. Fi 3.1 (solo caso di poliedri limitati); BT 2.5

Coni

Definizione

Un insieme non vuoto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è un *cono* se

$$\mathbf{x} \in C \implies \lambda \mathbf{x} \in C, \quad \lambda \geq 0$$

geometricamente, C è un cono se per ogni suo punto \mathbf{x} la semiretta uscente dall'origine e passante per \mathbf{x} appartiene interamente a C .

- ▶ escludendo il caso speciale $C = \{\mathbf{0}\}$, un cono è un insieme illimitato
- ▶ un cono può essere convesso o non convesso
- ▶ un poliedro della forma $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ è un cono (detto *cono poliedrale*)

Cono di recessione

Definizione

Un vettore $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ si dice *direzione* di un poliedro P se per ogni $\mathbf{x} \in P$ la semiretta $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}$, $\lambda \geq 0$ è contenuta in P .

Teorema

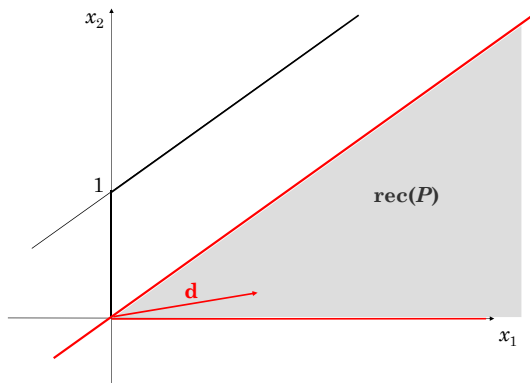
Un vettore $d \in \mathbb{R}^n$ è una direzione di un poliedro $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$ se e solo se è soluzione del sistema omogeneo $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Definizione

L'insieme di tutte le direzioni di un poliedro P si dice *cono di recessione* di P ; lo indichiamo con $rec(P)$

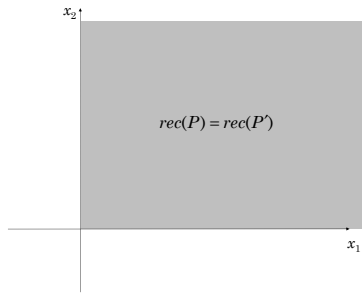
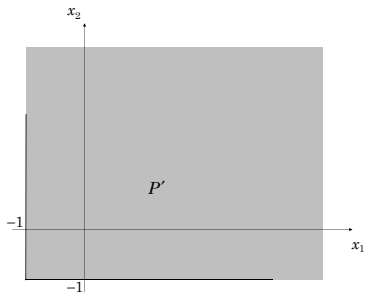
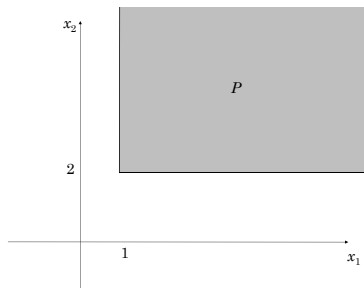
Esempio

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \geq -1, x_1, x_2 \geq 0\}$$



$$\text{rec}(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \geq 0, x_1, x_2 \geq 0\}$$

Esempio

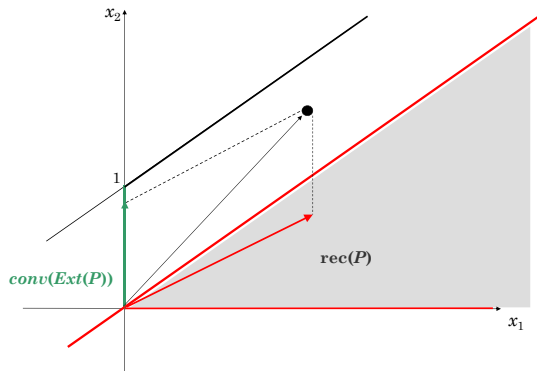


Rappresentazione di poliedri

Teorema

Sia un poliedro P per cui $Ext(P) \neq \emptyset$. Allora P può essere scritto nella forma

$$P = conv(Ext(P)) + rec(P)$$



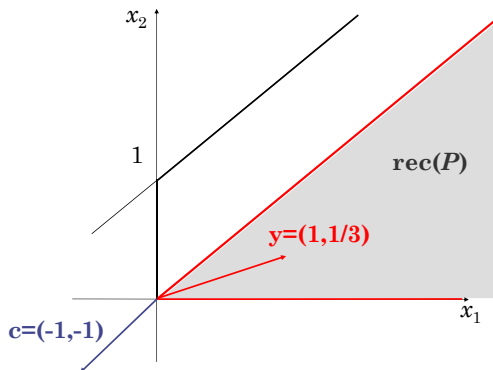
Teorema fondamentale della PL

Dato il problema $\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$, con $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$ non vuoto e $Ext(P) \neq \emptyset$ si ha:

- (i) se $\mathbf{c}^T \mathbf{y} < 0$ **per qualche** vettore $\mathbf{y} \in rec(P)$ il problema è illimitato
- (ii) se $\mathbf{c}^T \mathbf{y} \geq 0$ **per ogni** vettore $\mathbf{y} \in rec(P)$ il problema ammette una soluzione ottima nell'insieme $Ext(P)$

Esempio

$$\min -x_1 - x_2, P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \geq -1, x_1, x_2 \geq 0\}$$



Dimostrazione (i)

Dimostrazione (i) Supponiamo che esista $\mathbf{y} \in \text{rec}(P)$ tale che $\mathbf{c}^T \mathbf{y} < 0$.

- ▶ per definizione di cono di recessione, per ogni $\mathbf{x} \in P$ ed ogni $\lambda \geq 0$, $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \in P$
- ▶ essendo $\mathbf{c}^T \mathbf{y} < 0$, si ha che $\mathbf{c}^T (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) \rightarrow -\infty$ per $\lambda \rightarrow \infty$, quindi il problema è illimitato

Dimostrazione (ii)

(ii) $\mathbf{c}^T \mathbf{y} \geq 0$ per ogni $\mathbf{y} \in \text{rec}(P)$ e $\text{Ext}(P) = \{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^q\}$ non vuoto; poniamo $z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{v}^* = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{v}^i \mid i = 1, \dots, q\}$.

Per il teorema di rappresentazione ogni punto $\mathbf{x} \in P$ può essere espresso nella forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{y}$$

con $\mathbf{w} \in \text{conv}(\text{Ext}(P))$ e $\mathbf{y} \in \text{rec}(P)$.

quindi esistono moltiplicatori $\lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0$, $\sum_{i=1}^q \lambda_i = 1$ tali che $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{v}^i$

Dimostrazione (ii)

considerando il valore della soluzione \mathbf{x} si ha:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T (\mathbf{w} + \mathbf{y}) = \mathbf{c}^T \left(\sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{v}^i \right) + \mathbf{c}^T \mathbf{y}$$

essendo $\mathbf{c}^T \mathbf{y} \geq 0$ si ha:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T \left(\sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{v}^i \right) = \sum_{i=1}^q \lambda_i (\mathbf{c}^T \mathbf{v}^i) \geq \sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{c}^T \mathbf{v}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{v}^*$$

Essendo \mathbf{x} un generico punto di P , il punto estremo \mathbf{v}^* è soluzione ottima del problema



Ottimalità dei punti estremi: caso limitato

Un politopo P non può contenere una semiretta, quindi $rec(P) = \emptyset$ e $P = conv(Ext(P))$. Ciò implica il seguente

Corollario

Sia P è un politopo non vuoto. Esiste almeno una soluzione ottima del problema $\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$ corrispondente ad un vertice di P

Primi algoritmi?

- ▶ Se il problema di PL definito su un politopo, allora esiste una soluzione ottima su un vertice, quindi "basta" enumerare tutti i vertici.
- ▶ Algoritmo di "ricerca locale":
 1. Scegli un vertice \mathbf{x}^i e valuta la f.o.
 2. Se esiste un vertice vicino migliore, spostati sul nuovo vertice.
 3. Continua finché esistono vertici che migliorano la f.o.

L'algoritmo si arresta ($Ext(P)$ è finito) in un punto di minimo locale, che è anche di minimo globale (PL è programmazione convessa!)