Il teorema fondamentale della PL

- rappresentazione di poliedri
- teorema fondamentale della PL
- caso limitato: ottimalità dei punti estremi

rif. Fi 3.1 (solo caso di poliedri limitati); BT 2.5

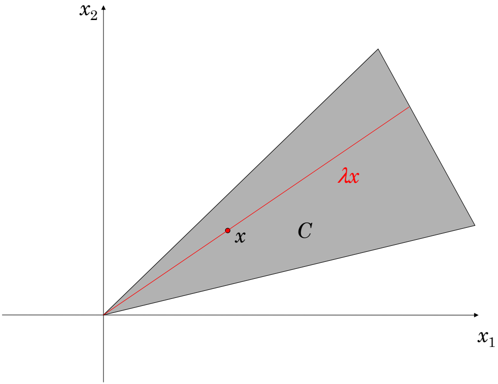
Coni

Definizione

Un insieme non vuoto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è un *cono* se

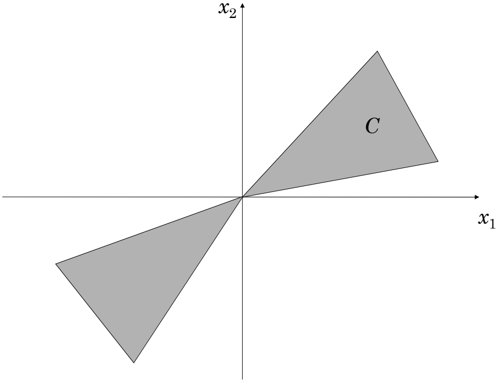
$$\mathbf{x} \in C \implies \lambda \mathbf{x} \in C, \qquad \lambda \geq \mathbf{0}$$

geometricamente, C è un cono se per ogni suo punto $\mathbf{x}$ la semiretta uscente dall'origine e passante per $\mathbf{x}$ appartiene interamente a C.

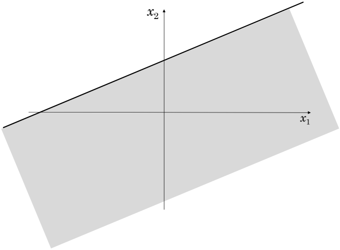


Coni

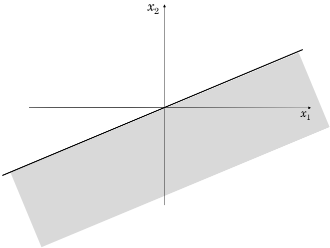
- escludendo il caso speciale $C = \{\mathbf{0}\}$, un cono è un insieme illimitato
- un cono può essere convesso o non convesso



Coni poliedrali



$\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b \neq 0$
non è un cono



$\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq 0$
è un cono

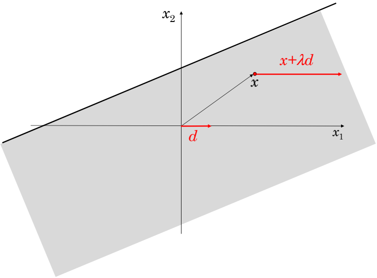
Un poliedro della forma $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ è un cono detto *cono poliedrale*

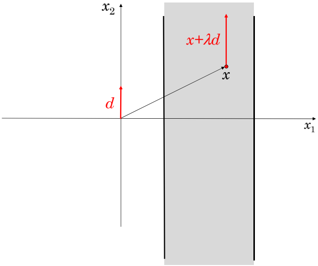
Direzioni di un poliedro

Definizione

Un vettore $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ si dice *direzione* di un poliedro P se per ogni $\mathbf{x} \in P$ la semiretta $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}, \lambda \geq 0$ è contenuta in P.

Esempi:





Cono di recessione

Teorema

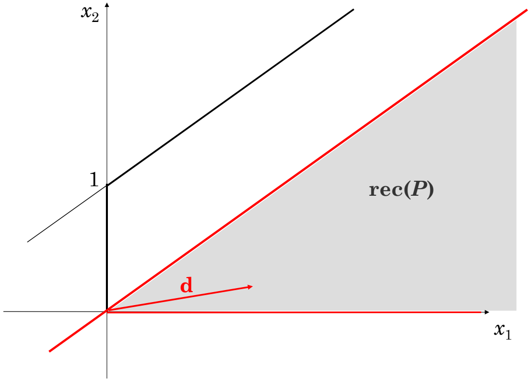
Un vettore $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ è una direzione di un poliedro $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$ se e solo se è soluzione del sistema omogeneo $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Definizione

L'insieme di tutte le direzioni di un poliedro P si dice *cono di recessione* di P; lo indichiamo con $rec(P)$

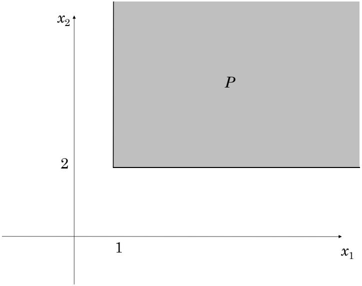
Esempio

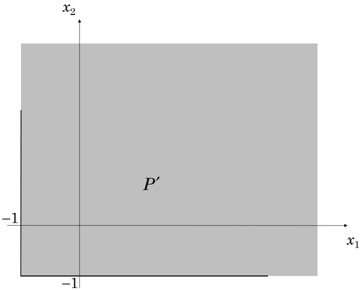
$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \geq -1, x_1, x_2 \geq 0\}$$

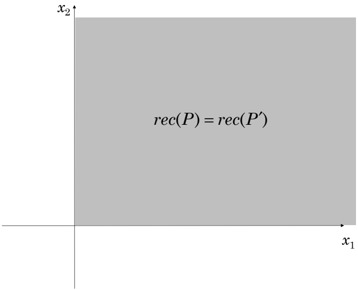


$$rec(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \geq 0, x_1, x_2 \geq 0\}$$

Esempio





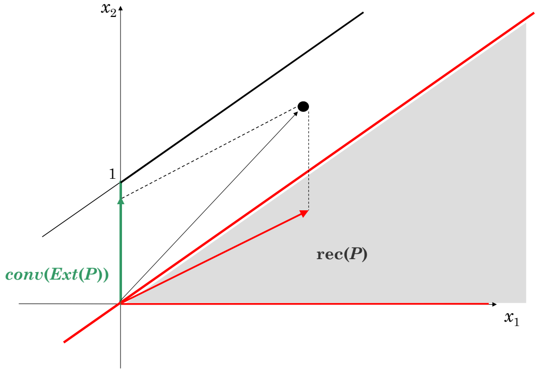


Rappresentazione di poliedri

Teorema

Sia un poliedro P per cui $Ext(P) \neq \emptyset$. Allora P può essere scritto nella forma

$$P = conv(Ext(P)) + rec(P)$$



Teorema fondamentale della PL

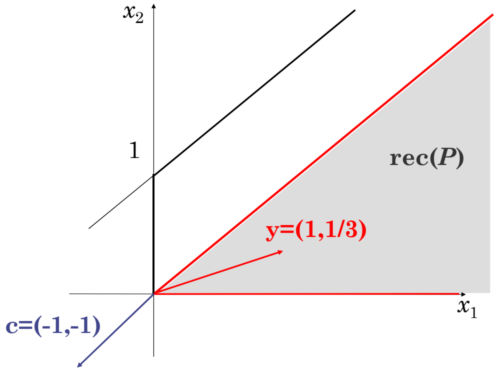
Dato il problema $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$, con $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$ non vuoto e $Ext(P) \neq \emptyset$ si ha:

(i) se $\mathbf{c}^T\mathbf{y} < 0$ **per qualche** vettore $\mathbf{y} \in rec(P)$ il problema è illimitato

(ii) se $\mathbf{c}^T\mathbf{y} \geq 0$ **per ogni** vettore $\mathbf{y} \in rec(P)$ il problema ammette una soluzione ottima nell'insieme $Ext(P)$

Esempio

$\min -x_1 - x_2$
s.t.
$\mathbf{x} \in P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \geq -1, x_1, x_2 \geq 0\}$



Dimostrazione caso (i)

(i) Supponiamo che esista $\mathbf{y} \in rec(P)$ tale che $\mathbf{c}^T\mathbf{y} < 0$.

- per definizione di cono di recessione, per ogni $\mathbf{x} \in P$ ed ogni $\lambda \geq 0$, risulta $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in P$
- calcolando il valore di tale punto si ha che

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{y}$$

essendo $\mathbf{c}^T\mathbf{y} < 0$, questo tende a $-\infty$ per $\lambda \to \infty$, quindi il problema è illimitato $\square$

Dimostrazione caso (ii)

(ii) $\mathbf{c}^T\mathbf{y} \geq 0$ per ogni $\mathbf{y} \in rec(P)$.

Ricordiamo che $Ext(P) = \{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^q\}$ è non vuoto. Quindi, poniamo $z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{v}^* = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{v}^i | i = 1, \ldots, q\}$.

Per il teorema di rappresentazione ogni punto $\mathbf{x} \in P$ può essere espresso nella forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{y}$$

con $\mathbf{w} \in conv(Ext(P))$ e $\mathbf{y} \in rec(P)$.

quindi esistono moltiplicatori $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \geq 0$, $\sum_{i=1}^q \lambda_i = 1$ tali che $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{v}^i$

Dimostrazione (ii)

considerando il valore della soluzione $\mathbf{x}$ si ha:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T(\mathbf{w} + \mathbf{y}) = \mathbf{c}^T(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{v}^i) + \mathbf{c}^T\mathbf{y}$$

essendo $\mathbf{c}^T\mathbf{y} \geq 0$ si ha:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{v}^i) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i(\mathbf{c}^T\mathbf{v}^i) \geq \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{c}^T\mathbf{v}^* = \mathbf{c}^T\mathbf{v}^*$$

Essendo $\mathbf{x}$ un generico punto di P, il punto estremo $\mathbf{v}^*$ è soluzione ottima del problema $\square$

Ottimalità dei punti estremi: caso limitato

Se P è un politopo non può contenere una semiretta, quindi:

- $rec(P) = \{\mathbf{0}_n\}$
- $P = conv(Ext(P))$

Ciò implica il seguente

Corollario
Sia P un politopo non vuoto e $Ext(P) \neq \emptyset$. Esiste almeno una soluzione ottima del problema $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$ corrispondente ad un vertice di P

Primi algoritmi?

- Se il problema di PL definito su un politopo, allora esiste una soluzione ottima su un vertice, quindi "basta" enumerare tutti i vertici.
- Algoritmo di "ricerca locale":
  1. Scegli un vertice $\mathbf{x}^i$ e valuta la f.o.
  2. Se esiste un vertice vicino migliore, spostati sul nuovo vertice.
  3. Continua finché esistono vertici che migliorano la f.o.

L'algoritmo si arresta ($Ext(P)$ è finito) in un punto di minimo locale, che è anche di minimo globale (PL è programmazione convessa!)