

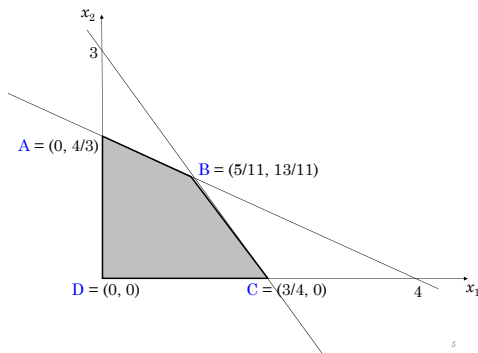
## Basi e soluzioni di base (forma standard)

- ▶ soluzioni di base di poliedri in forma standard
- ▶ basi di  $A$
- ▶ corrispondenza fra basi e soluzioni di base
- ▶ soluzioni di base adiacenti
- ▶ degenerazione

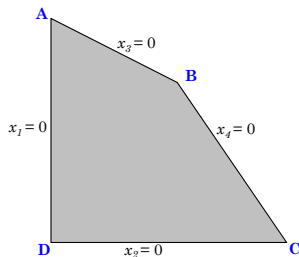
rif. Fi 3.1.1; BT 2.3

# Esempio

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 &\leq 4 \\4x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\4x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$



## Osservazione

Annullando 2 delle 4 variabili si ottengono le soluzioni del sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  corrispondenti ai vertici

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

$$4x_1 + x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$x_1, x_2 = 0$	$\implies$	$x_3 = 4, x_4 = 3$	$D = (0, 0)$
$x_2, x_4 = 0$	$\implies$	$x_1 = 3/4, x_3 = 13/4$	$C = (3/4, 0)$
$x_3, x_4 = 0$	$\implies$	$x_1 = 5/11, x_2 = 13/11$	$B = (5/11, 13/11)$
$x_1, x_3 = 0$	$\implies$	$x_2 = 4/3, x_4 = 5/3$	$A = (0, 4/3)$

## Osservazione

Allo stesso modo si ottengono le soluzioni di base non ammissibili:

$$x_1, x_4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 3, x_3 = -5$$

$$x_2, x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 4, x_3 = -13$$

In generale, dato un sistema di equazioni lineari con  $n$  incognite ed  $m$  vincoli (con  $m \leq n$ ), annullando  $n - m$  incognite si ricavano le rimanenti  $m$  incognite in modo univoco (a meno di casi singolari)

## Ipotesi generale

D'ora in poi, dato un problema in forma standard

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

con  $\mathbf{A}$  matrice  $m \times n$ , facciamo la seguente:

**Ipotesi** le righe di  $\mathbf{A}$  sono linearmente indipendenti

essendo  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ , ciò implica  $m \leq n$ . In algebra lineare, ciò equivale a dire che  $\text{rango}(\mathbf{A}) = m$  (o che  $\mathbf{A}$  ha rango pieno)

È possibile dimostrare che, in caso contrario, esiste un problema equivalente per cui l'ipotesi è soddisfatta.

## Soluzioni di base di poliedri in forma standard

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Una soluzione di base  $\mathbf{x}$ :

- ▶ soddisfa tutti i vincoli di uguaglianza (cioè è soluzione del sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ )
- ▶ è descritta da  $n$  vincoli attivi linearmente indipendenti, cioè (per l'ipotesi generale) ha  $n - m$  variabili nulle

# Basi di $\mathbf{A}$

## Definizione

Una collezione di  $m$  colonne di  $\mathbf{A}$  linearmente indipendenti è detta *base* di  $\mathbf{A}$ . Queste formano una sottomatrice quadrata  $\mathbf{B}$  non singolare.

Esempi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

## Rappresentazione rispetto ad una base

Esplicitiamo le colonne di  $\mathbf{A}$  in base e fuori base, indicando con  $\mathbf{F}$  la corrispondente sottomatrice:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{F}]$$

Analogamente, le variabili  $x_j$  associate alle colonne di  $B$  si dicono *variabili in base*, le altre *variabili fuori base*:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix}$$

riscriviamo il sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  come  $[\mathbf{B} \quad \mathbf{F}] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{pmatrix} = \mathbf{b}$ , cioè

$$\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Fx}_F = \mathbf{b}$$



## Rappresentazione rispetto ad una base

Essendo  $\mathbf{B}$  invertibile, possiamo premoltiplicare per  $\mathbf{B}^{-1}$  ottenendo

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

ovvero

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F$$

abbiamo cioè **ricavato le variabili in base, in modo univoco, a partire da quelle fuori base**

## Esempio (continua)

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

$$4x_1 + x_2 + x_4 = 3$$

consideriamo la base

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Quindi,

$x_1, x_2$  sono le variabili **in base** e  $x_3, x_4$  quelle **fuori base**

## Esempio (continua)

risulta  $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/11 & 3/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{pmatrix}$

La rappresentazione  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F$  è quindi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1/11 & 3/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} -1/11 & 3/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 = 5/11 + 1/11x_3 - 3/11x_4 \\ x_2 = 13/11 - 4/11x_3 + 1/11x_4 \end{cases}$$

## Soluzione di base

la soluzione

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix}$$

soddisfa **sempre**, per costruzione, il sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

### Definizione

La soluzione ottenuta ponendo

$$\mathbf{x}_F = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

si dice *soluzione di base associata alla base B*.

Se  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  la soluzione è una s.b.a. e **B** si dice *base ammissibile*

## Esempio (continua)

tornando al nostro esempio:

$$\begin{cases} x_1 = 5/11 + 1/11x_3 - 3/11x_4 \\ x_2 = 13/11 - 4/11x_3 + 1/11x_4 \end{cases}$$

la soluzione  $x_1 = 5/11, x_2 = 13/11, x_3 = 0, x_4 = 0$  è la sba associata alla base  $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$ .

Si osservi che questa corrisponde al vertice  $B$

Esercizio. Enumerare le rimanenti basi di  $A$  e calcolare le corrispondenti soluzioni di base

## Basi vs. soluzioni di base

- ▶ soluzioni di base distinte corrispondono a basi diverse. Infatti,  $\mathbf{B}$  è non-singolare e  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$  ha un'unica soluzione
- ▶ basi diverse possono corrispondere alla medesima soluzione di base

### Esempio

$$x_1 + x_4 = 1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$x_3 + x_4 - x_5 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Basi vs. soluzioni di base

Consideriamo le due basi

$$\mathbf{B}_1 = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e calcoliamo le corrispondenti soluzioni di base

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Basi vs. soluzioni di base

Quindi, dette  $\mathbf{x}^1$  e  $\mathbf{x}^2$  le soluzioni di base associate risp. alle basi  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  si ha

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2 = (1, 1, 0, 0, 0)$$

In altre parole, alle due basi distinte corrisponde la stessa soluzione di base



# Basi degeneri

## Definizione

Una base  $B$  si dice *degenera* se  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$  ha una o più componenti nulle

Esempio (continua)

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  sono basi degeneri

# Basi adiacenti

## Definizione

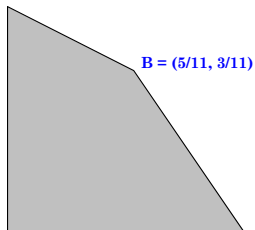
Due soluzioni di base si dicono adiacenti se esistono  $n - 1$  vincoli linearmente indipendenti che sono attivi in entrambe

Per problemi in forma standard, si dice che *due basi sono adiacenti* se differiscono di una sola colonna.

Soluzioni di base adiacenti possono essere sempre ottenute da basi adiacenti.

## Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

