Costi ridotti e ottimalità

- condizione sufficiente di ottimalità
- spostamento su una base adiacente
- condizione di illimitatezza

rif. Fi 3.2;

Ricapitolando

Sin qui abbiamo un algoritmo enumerativo applicabile quando P è un politopo, che calcola una soluzione ottima in al più $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ passi enumerando le sba.

Vogliamo migliorarlo mediante:

- un criterio di arresto che riconosca una sba ottima
- uno spostamento da una sba ad un'altra migliorativa
- l'estensione al caso generale

Valore di una soluzione

Rappresentiamo il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ rispetto ad una base ammissibile $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F$$

il costo di una generica soluzione del sistema è:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_F^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_F^T] \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix}$$

cioè

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{F})\mathbf{x}_F = \mathsf{cost} + \bar{\mathbf{c}}_F^T\mathbf{x}_F = \mathsf{cost} + \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{x}$$

Costi ridotti

Definizione

Il vettore

$$\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} = [\mathbf{c}_B^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}, \mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}] =$$

$$= [\mathbf{0}, \mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}]$$

si dice *vettore dei costi ridotti* rispetto alla base $\mathbf{B}$

Possiamo dimostrare un risultato che ci permette di stabilire l'ottimalità di una base:

Dato un problema in forma standard $\{\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$, con $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ vale il seguente

Condizione sufficiente di ottimalità

Teorema

Sia $\mathbf{x}^*$ una sba associata alla base $\mathbf{B}$. Se $\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq 0$ allora $\mathbf{x}^*$ è una soluzione ottima

Dimostrazione

Ricordiamo che $\mathbf{x}^*$ è data da $\mathbf{x}_F^* = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}_B^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

Il costo di una soluzione $\mathbf{x} \in P$ è

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{x}$$

essendo per ipotesi $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$ risulta

$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ per ogni $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, cioè per ogni $\mathbf{x} \in P$

ma

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_F^T] \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$$

□

Ottimalità e degenerazione

la condizione diventa anche necessaria nel caso non degenere:

Teorema

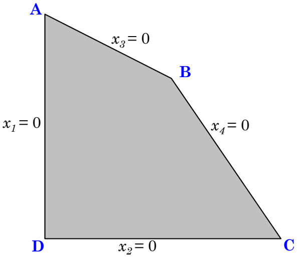
Sia $\mathbf{x}^*$ una sba associata alla base $\mathbf{B}$, con $\mathbf{B}$ non degenere. Allora:

- se $\bar{\mathbf{c}} \geq 0$ allora $\mathbf{x}^*$ è ottima
- se $\mathbf{x}^*$ è ottima allora $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$

Al contrario, nel caso degenere è possibile che una sba sia ottima ma qualche variabile (fuori base) abbia costo ridotto negativo

Esempio (cont.)

$$\min -5x_1 - 4x_2$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$
$$4x_1 + x_2 + x_4 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



consideriamo la base:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix}$$

e la sba associata (vertice C)

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 13/4 \end{bmatrix}, \mathbf{x_F} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio (cont.)

Verifichiamo l'ottimalità del vertice C calcolando il vettore dei costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}^T = [\mathbf{0}, \mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}]$

si ha:

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = [-5 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [-5/4, -5/4]$$

$$\mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = [-4, 0] - [-5/4, -5/4]$$

cioè

$$\bar{\mathbf{c}}^T = [0, -11/4, 0, 5/4]$$

il vettore $\mathbf{c}$ ha una componente negativa (e B è non degenere), quindi, il punto $\mathbf{x} = (3/4, 0, 13/4, 0)$ è sba **NON ottima**

Esempio (cont.)

spostiamoci sul vertice adiacente B, corrispondente alla base

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/11 & 3/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{pmatrix}$$

in questo caso si ha:

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = [-5 \quad -4] \begin{bmatrix} -1/11 & 3/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-1, -1]$$

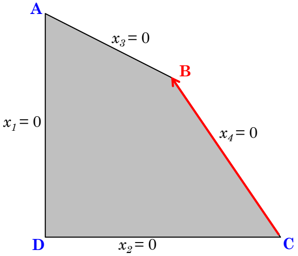
$$\mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = [0, 0] - [-1, -1] \implies \bar{\mathbf{c}}^T = [0, 0, 1, 1]$$

il vettore dei costi ridotti ha tutte componenti non-negative, quindi $\mathbf{x} = (5/11, 13/11, 0, 0)$ è sba **ottima** (vertice B)

Esempio (cont.)

vertice C: $\mathbf{x} = (3/4, 0, 13/4, 0)$
$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3]$,
$\bar{\mathbf{c}}^T = [0, -11/4, 0, 5/4]$,
$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = -15/4$

vertice B: $\mathbf{x} = (5/11, 13/11, 0, 0)$
$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$,
$\bar{\mathbf{c}}^T = [0, 0, 1, 1]$,
$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = -7$



la variabile x_2 **entra in base** e passa da 0 a $13/11$; il valore della f.o. diminuisce in quanto $\bar{c}_2 = -11/4 < 0$ (ricordate che $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \text{cost} + \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{x}$).

Quindi, i costi ridotti individuano le variabili candidate ad entrare in base, cioè quelle che riducono il valore della f.o.

Spostamento su una base adiacente

Siano

$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}]$ una base ammissibile di $\mathbf{A}$,
$\mathbf{x} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ la sba associata ad $\mathbf{A}$ e
$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{x}$ il suo valore.

Data una variabile x_h, $h \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$, per cui $\bar{c}_h < 0$, vogliamo individuare una base adiacente a $\mathbf{B}$ che includa la colonna $\mathbf{A}_h$ (in modo che x_h entri in base)

Quindi, rilasciamo la variabile x_h e teniamo fissate a zero tutte le altre fuori base.

Spostamento su una base adiacente

il sistema

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F$$

diventa:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_h \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_h x_h = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{A}}_h x_h$$

NB. essendo $\mathbf{B}$ una base ammissibile risulta $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$

Spostamento su una base adiacente

Per garantire l'ammissibilità deve essere $\mathbf{x_B} \geq \mathbf{0}$, quindi:

$$\begin{cases} x_{B(1)} = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1h} x_h \geq 0 \\ x_{B(2)} = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2h} x_h \geq 0 \\ \vdots \\ x_{B(m)} = \bar{b}_m - \bar{a}_{mh} x_h \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bar{a}_{1h} x_h \leq \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{2h} x_h \leq \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_{mh} x_h \leq \bar{b}_m \end{cases}$$

Per ciascuna condizione i si hanno due possibilità:

- $\bar{a}_{ih} \leq 0 \implies$ nessun vincolo per $x_h \geq 0$
- $\bar{a}_{ih} > 0 \implies x_h \leq \bar{b}_i / \bar{a}_{ih}$

quindi, il valore massimo che può assumere x_h è

$$\theta = \min\{\bar{b}_i / \bar{a}_{ih} : i = 1, \ldots, m, \bar{a}_{ih} > 0\}$$

Esempio (cont.)

Consideriamo nuovamente il vertice $C = (3/4, 0, 13/4, 0)$, sba rispetto alla base $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3]$, con costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}^T = [0, -11/4, 0, 5/4]$.

Applichiamo il procedimento con $h = 2$ (visto che $\bar{c}_2 < 0$):

$$\begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_2 x_2$$

equivale a

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$$

quindi, le condizioni di ammissibilità sono

$$\begin{cases} x_1 = 3/4 - 1/4x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq 3 \\ x_3 = 13/4 - 11/4x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq 13/11 = \theta \end{cases}$$

Esempio (cont.)

ponendo $x_2 = 13/11$ otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = 3/4 - 1/4x_2 = 5/11 \\ x_3 = 13/4 - 11/4x_2 = 0 \end{cases}$$

cioè, la soluzione $(5/11, 13/11, 0, 0)$ di valore -7

si osservi che la variazione del valore della funzione obiettivo è stata pari a $\bar{c}_h\theta = -13/4$

Nuova base

Sia $t = \arg\min\{\bar{b}_i/\bar{a}_{ih} : i = 1, \ldots, m, \bar{a}_{ih} > 0\}$. Aumentando x_h fino al valore $x_h = \theta = \bar{b}_t/\bar{a}_{th}$ si ottiene:

$$x_{B(t)} = \bar{b}_t - \theta \bar{a}_{th} = 0$$

cioè $x_{B(t)}$ "esce dalla base": la colonna $\mathbf{A}_{B(t)}$ è stata scambiata con la colonna "migliorativa" $\mathbf{A}_h$

$$\mathbf{B} = [A_{B(1)}, \ldots, A_{B(t)}, \ldots, A_{B(m)}]$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = [A_{B(1)}, \ldots, A_{B(t-1)}, A_h, A_{B(t+1)}, \ldots, A_{B(m)}]$$

Nuova base

È facile dimostrare che $\tilde{\mathbf{B}}$ è ancora una base:

$$\mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \bar{a}_{1h} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \bar{a}_{2h} & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{th} & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{m-1,h} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{mh} & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi,

$$det(\mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}) = (-1)^{t+h}\bar{a}_{th} \neq 0 \implies det(\tilde{\mathbf{B}}) \neq 0 \qquad \square$$

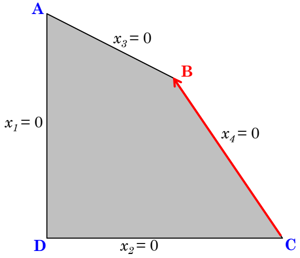
Esempio (cont.)

Nel nostro caso la base di partenza è $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3]$. Ponendo $x_2 = \theta = 13/11$ otteniamo $x_{B(2)} = x_3 = 0$. Quindi, scambiando $\mathbf{A}_3$ con $\mathbf{A}_2$ otteniamo la nuova base

$$\tilde{\mathbf{B}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$$

La sba associata a $\tilde{\mathbf{B}}$ è il punto $\tilde{x} = (5/11, 13/11, 0, 0)$, corrispondente al vertice B

abbiamo quindi implementato lo spostamento $C \to B$



Scambio degenere

Se esiste un qualche i per cui $\bar{b}_i = 0$ (caso degenere) e $\bar{a}_{ih} > 0$, allora

$$\theta = \min\{\bar{b}_i/\bar{a}_{ih} : i = 1, \ldots, m, \bar{a}_{ih} > 0\} = 0$$

cioè, non si ha miglioramento della f.o.

In pratica, la sba associata alla base $\mathbf{B}$ coincide con quella associata nuova base $\tilde{\mathbf{B}}$. Geometricamente, si rimane sullo stesso vertice!

Caso illimitato

Riprendiamo le condizioni di ammissibilità:

$$\begin{cases} \bar{a}_{1h}x_h \leq \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{2h}x_h \leq \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_{mh}x_h \leq \bar{b}_m \end{cases}$$

se $\bar{a}_{ih} \leq 0$ per $i = 1, \ldots, m$ allora x_h può assumere un valore grande a piacere ed **il problema è illimitato**