

Costi ridotti e ottimalità

- ▶ condizione sufficiente di ottimalità
- ▶ spostamento su una base adiacente

rif. Fi 3.2;

Ricapitolando

Sin qui abbiamo un algoritmo enumerativo applicabile quando P è un politopo, che calcola una soluzione ottima in al più

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ passi enumerando le sba.

Vogliamo migliorarlo mediante:

- ▶ un criterio di arresto che riconosca una sba ottima
- ▶ uno spostamento da una sba ad un'altra migliorativa
- ▶ l'estensione al caso generale

Valore di una soluzione

Rappresentiamo il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ rispetto ad una base ammissibile \mathbf{B} :

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F$$

il costo di una generica soluzione del sistema è:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_F^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_F^T] \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix}$$

cioè

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}) \mathbf{x}_F = \text{cost} + \bar{\mathbf{c}}_F^T \mathbf{x}_F = \text{cost} + \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x}$$

Costi ridotti

Definizione

Il vettore

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{c}}^T &= \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} = [\mathbf{c}_B^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}, \mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}] = \\ &= [\mathbf{0}, \mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}]\end{aligned}$$

si dice *vettore dei costi ridotti* rispetto alla base \mathbf{B}

Possiamo dimostrare un risultato che ci permette di stabilire l'ottimalità di una base: Dato un problema in forma standard $\{\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$, con $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ vale il seguente

Condizione sufficiente di ottimalità

Teorema

Sia \mathbf{x}^* una sba associata alla base \mathbf{B} . Se $\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ allora \mathbf{x}^* è una soluzione ottima

Dimostrazione

Il costo di una soluzione $\mathbf{x} \in P$ è $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x}$ essendo per ipotesi $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$ risulta

$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ per ogni $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, cioè per ogni $\mathbf{x} \in P$

ma

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_F^T] \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$



Ottimalità e degenerazione

la condizione diventa anche necessaria nel caso non degenero:

Teorema

Sia \mathbf{x}^* una sba associata alla base \mathbf{B} , con \mathbf{B} non degenero. Allora:

- ▶ se $\bar{c} \geq 0$ allora \mathbf{x}^* è ottima
- ▶ se \mathbf{x}^* è ottima allora $\bar{c} \geq 0$

Al contrario, nel caso degenero è possibile che una sba sia ottima ma qualche variabile (fuori base) abbia costo ridotto negativo

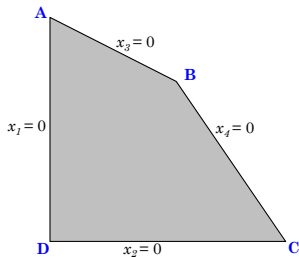
Esempio (cont.)

$$\min -5x_1 - 4x_2$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

$$4x_1 + x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



consideriamo la base: $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e verifichiamo l'ottimalità del vertice **C**

Esempio (cont.)

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix}$$

calcoliamo il vettore dei costi ridotti:

$$\bar{\mathbf{c}}^T = [\mathbf{0}, \mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}]$$

si ha:

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = [-5 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [-5/4, -5/4]$$

$$\mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = [-4, 0] - [-5/4, -5/4] \implies \bar{\mathbf{c}}^T = [0, -11/4, 0, 5/4]$$

\mathbf{c} ha una componente negativa (e B è non degenere), quindi, il punto $\mathbf{x} = (3/4, 0, 13/4, 0)$ è sba **NON ottima** (vertice C)

Esempio (cont.)

spostiamoci sul vertice adiacente B , corrispondente alla base

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/11 & 3/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{pmatrix}$$

in questo caso si ha:

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = [-5 \quad -4] \begin{bmatrix} -1/11 & 3/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-1, -1]$$

$$\mathbf{c}_F^T - \mathbf{c}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = [0, 0] - [-1, -1] \implies \bar{\mathbf{c}}^T = [0, 0, 1, 1]$$

il vettore dei costi ridotti ha tutte componenti non-negative, quindi

$\mathbf{x} = (5/11, 13/11, 0, 0)$ è sba **ottima** (vertice B)

Esempio (cont.)

(vertice C)

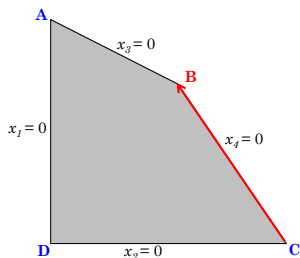
$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3], \mathbf{x} = (3/4, 0, 13/4, 0)$$

$$\bar{\mathbf{c}}^T = [0, -11/4, 0, 5/4], \mathbf{c}^T \mathbf{x} = -15/4$$

(vertice B)

$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2], \mathbf{x} = (5/11, 13/11, 0, 0)$$

$$\bar{\mathbf{c}}^T = [0, 0, 1, 1], \mathbf{c}^T \mathbf{x} = -7$$



la variabile x_2 **entra in base** e passa da 0 a $13/11$; il valore della f.o. diminuisce in quanto $\bar{c}_2 = -11/4 < 0$ (ricordate che $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \text{cost} + \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x}$).

Quindi, i costi ridotti **individuano le variabili candidate** ad entrare in base, cioè quelle che riducono il valore della f.o.

Spostamento su una base adiacente

Sia $\mathbf{B} = [A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}]$ una base ammissibile di \mathbf{A} ,
 $\mathbf{x} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ la corrispondente sba e $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x}$ il suo valore.

Data una variabile x_h , $h \notin B(1), \dots, B(m)$, per cui $\bar{c}_h < 0$,
vogliamo individuare una base adiacente a \mathbf{B} che includa la
colonna \mathbf{A}_h (in modo che x_h entri in base)

Quindi rilasciamo la variabile x_h e teniamo fissate a zero tutte le
altre fuori base.

Spostamento su una base adiacente

il sistema

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F$$

diventa:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_h \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_h x_h = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{A}}_h x_h$$

NB. essendo \mathbf{B} una base ammissibile risulta $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$

Spostamento su una base adiacente

Per garantire l'ammissibilità deve essere $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$, quindi:

$$\begin{cases} x_{B(1)} = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1h}x_h \geq 0 \\ x_{B(2)} = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2h}x_h \geq 0 \\ \vdots \\ x_{B(m)} = \bar{b}_m - \bar{a}_{mh}x_h \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{a}_{1h}x_h \leq \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{2h}x_h \leq \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_{mh}x_h \leq \bar{b}_m \end{cases}$$

Per ciascuna condizione i si hanno due possibilità:

- ▶ $\bar{a}_{ih} \leq 0 \implies$ nessun vincolo per $x_h \geq 0$
- ▶ $\bar{a}_{ih} > 0 \implies x_h \leq \bar{b}_i/\bar{a}_{ih}$

quindi, il valore massimo che può assumere x_h è

$$\theta = \min\{\bar{b}_i/\bar{a}_{ih} : i = 1, \dots, m, \bar{a}_{ih} > 0\}$$

Conseguenze

- ▶ quando x_h assume il valore limite θ la f.o. diminuisce della quantità $|\bar{c}_h|\theta$
- ▶ se esiste un qualche i per cui $\bar{b}_i = 0$ (caso degenere) e $\bar{a}_{ih} > 0$, allora $\theta = 0$ e non si ha miglioramento della f.o. (si rimane sullo stesso vertice!)
- ▶ se $\bar{a}_{ih} \leq 0$ per $i = 1, \dots, m$ allora x_h può assumere un valore grande a piacere ed il problema è illimitato

Nuova base

sia t una riga per cui $\bar{a}_{th} > 0$ tale che $\theta = b_t/\bar{a}_{th}$. Aumentando x_h fino al valore $x_h = \theta$ si ottiene:

$$x_{B(t)} = \bar{b}_t - \theta\bar{a}_{th} = 0$$

cioè $x_{B(t)}$ "esce dalla base": la colonna $\mathbf{A}_{B(t)}$ è stata scambiata con la colonna "migliorativa" \mathbf{A}_h

$$\mathbf{B} = [A_{B(1)}, \dots, A_{B(t)}, \dots, A_{B(m)}]$$

↓

$$\tilde{\mathbf{B}} = [A_{B(1)}, \dots, A_{B(t-1)}, A_h, A_{B(t+1)}, \dots, A_{B(m)}]$$

Nuova base

È facile dimostrare che $\tilde{\mathbf{B}}$ è ancora una base:

$$\mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \bar{a}_{1h} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \bar{a}_{2h} & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{th} & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{m-1,h} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{mh} & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi,

$$\det(\mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}) = (-1)^{t+h}\bar{a}_{th} \neq 0 \implies \det(\tilde{\mathbf{B}}) \neq 0$$

Esempio (cont.)

Consideriamo nuovamente il vertice $C = (3/4, 0, 13/4, 0)$, sba rispetto alla base $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3]$, con costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}^T = [0, -11/4, 0, 5/4]$.

Applichiamo il procedimento con $h = 2$ (visto che $\bar{c}_2 < 0$):

$$\begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_2x_2$$

equivale a

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$$

quindi, le condizioni di ammissibilità sono

$$\begin{cases} x_1 = 3/4 - 1/4x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq 3 \\ x_3 = 13/4 - 11/4x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq 13/11 = \theta \end{cases}$$

Esempio (cont.)

Aumentando il valore di x_2 da 0 fino al massimo livello ammissibile $13/11$ implica $x_{B(2)} = x_3 = 0$ e otteniamo il nuovo punto $\tilde{x} = (5/11, 13/11, 0, 0)$, corrispondente al **vertice B**

il valore della funzione obiettivo diminuisce di $\theta|\bar{c}_2| = 13/11 \cdot 11/4 = 13/4$

abbiamo quindi implementato lo spostamento $C \rightarrow B$:

