# Modelli di PL: allocazione ottima di risorse

- Un esempio
- Modelli a risorse condivise
- Modelli a risorse alternative
- Modelli multi-periodo

# Allocazione ottima di robot

- Un' azienda automobilistica produce tre diversi modelli di autovettura: economico (E), normale (N), lusso (L)
- ogni autovettura viene lavorata da tre robot: $A, B$ disponibili $8$ ore al giorno e $C$ disponibile $5$ ore al giorno
- durate della lavorazione (min.) di ciascun robot su ciascuna vettura:

| | economica | normale | lusso |
|---|---|---|---|
| A | 20 | 30 | 62 |
| B | 31 | 42 | 51 |
| C | 16 | 81 | 10 |

- il numero di autovetture L non deve superare il $20\%$ del totale, mentre il numero di E deve essere almeno il $40\%$
- tutte le vetture vengono vendute e il ricavo ammonta rispettivamente a $1000, 1500, 2200$ Euro per ciascuna autovettura di tipo E,N e L

Formulare il problema di PL che permetta di elaborare un piano di produzione che massimizzi il ricavo totale

# Formulazione

- variabili decisionali: $x_E, x_N, x_L$ numero di autovetture del modello risp. E, N, L da produrre in un giorno
- funzione obiettivo: ricavo dalle vendite

$$\max 1000x_E + 1500x_N + 2200x_L$$

- vincolo sulla capacità produttiva

$$\begin{aligned} 20x_E + 30x_N + 62x_L &\leq 480 \\ 31x_E + 42x_N + 51x_L &\leq 480 \\ 16x_1 + 81x_N + 10x_L &\leq 300 \end{aligned}$$

- vincoli sulle percentuali di vetture

$$\begin{aligned} x_L &\leq 0.2(x_E + x_N + x_L) \\ x_E &\geq 0.4(x_E + x_N + x_L) \end{aligned}$$

- vincoli di non negatività

$$x_E \geq 0, x_N \geq 0, x_L \geq 0$$

# Modello di PL

$$\max 1000x_E + 1500x_N + 2200x_L$$

subject to

$$20x_E + 30x_N + 62x_L \leq 480$$

$$31x_E + 42x_N + 51x_L \leq 480$$

$$16x_1 + 81x_N + 10x_L \leq 300$$

$$x_L \leq 0.2(x_E + x_N + x_L)$$

$$x_E \geq 0.4(x_E + x_N + x_L)$$

$$x_E, x_N, x_L \geq 0$$

Osservazione Le variabili sono *continue* ma rappresentano quantità indivisibili (numero di autovetture). Dovremmo imporre che $x_E, x_L, x_N$ fossero intere, perdendo la linearità del problema

# Variante

- Una riorganizzazione del processo produttivo permette ora di produrre un'autovettura (di qualsiasi tipo) **utilizzando un solo robot**
- le nuove durate delle operazioni sono (adesso i valori di una colonna sono in alternativa!):

| | economica | normale | lusso |
|---|---|---|---|
| A | 80 | 50 | 102 |
| B | 41 | 95 | 71 |
| C | 36 | 109 | 40 |

**nuove variabili decisionali**: $x_{ij}$, $i = A, B, C; j = E, N, L$ numero di autovetture del modello $j$ costruite dal robot $i$

# Formulazione

- funzione obiettivo

$$\max 1000(x_{AE}+x_{BE}+x_{CE})+1500(x_{AN}+x_{BN}+x_{CN})+2200(x_{AL}+x_{BL}+x_{CL})$$

- vincolo sulla capacità produttiva

$$\begin{aligned} 80x_{AE} + 50x_{AN} + 102x_{AL} &\leq 480 \\ 41x_{BE} + 95x_{BN} + 71x_{BL} &\leq 480 \\ 36x_{CL} + 109x_{CN} + 40x_{CL} &\leq 300 \end{aligned}$$

- vincoli sulle percentuali di vetture

$$\begin{aligned} x_{AL} + x_{BL} + x_{CL} &\leq 0.2 \sum_{i=A,B,C} \sum_{j=E,L,N} x_{ij} \\ x_{AE} + x_{BE} + x_{CE} &\geq 0.4 \sum_{i=A,B,C} \sum_{j=E,L,N} x_{ij} \end{aligned}$$

- vincoli di non negatività

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = A, B, C; j = E, N, L$$

# Modello di PL

$$\max 1000(x_{AE}+x_{BE}+x_{CE})+1500(x_{AN}+x_{BN}+x_{CN})+$$
$$+2200(x_{AL}+x_{BL}+x_{CL})$$

subject to

$$80x_{AE}+50x_{AN}+102x_{AL}\leq 480$$
$$41x_{BE}+95x_{BN}+71x_{BL}\leq 480$$
$$36x_{CL}+109x_{CN}+40x_{CL}\leq 300$$
$$x_{AL}+x_{BL}+x_{CL}\leq 0.2\sum_{i=A,B,C}\sum_{j=E,L,N}x_{ij}$$
$$x_{AE}+x_{BE}+x_{CE}\geq 0.4\sum_{i=A,B,C}\sum_{j=E,L,N}x_{ij}$$
$$x_{ij}\geq 0,\qquad i=A,B,C;\, j=E,N,L$$

# In generale

- $m$ risorse $R_1, \ldots, R_m$
- $n$ prodotti $P_1, \ldots, P_n$
- produrre un'unità di $P_j$ richiede una quantità $a_{ij}$ di risorsa $R_i$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & P_1 & \cdots & P_j & \cdots & P_n \\
\hline
R_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
R_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
R_m & a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{array}
$$

- le risorse sono limitate: si dispone di $b_i$ unità della risorsa $R_i$ $i = 1, \ldots, m$
- $p_j$ ricavo dalla vendita di un'unità di $P_j$, $j = 1, \ldots, n$

# Caso 1: risorse condivise

- variabili decisionali: $x_1, \ldots, x_n$ quantità da produrre di ciascun prodotto
- funzione obiettivo: ricavo (proporzionalità, additività)

$$z = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$$

- vincoli sulla capacità produttiva

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
\vdots \qquad \ldots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m
\end{aligned}$$

- vincoli di non negatività

$$x_j \geq 0, j = i, \ldots, n$$

# Caso 2: risorse alternative

- variabili decisionali: $x_{ij}$ quantità di prodotto $j$ da produrre con la risorsa $i$
- funzione obiettivo: ricavo (proporzionalità, additività)

$$z = p_1 \sum_{i=1}^{m} x_{i1} + p_2 \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \ldots + p_n \sum_{i=1}^{n} x_{in} = \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

- vincoli sulla capacità produttiva

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + \ldots + a_{1n}x_{1n} &\leq b_1 \\ a_{21}x_{21} + \ldots + a_{2n}x_{2n} &\leq b_2 \\ \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + \ldots + a_{mn}x_{mn} &\leq b_m \end{aligned}$$

- vincoli di non negatività

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m; j = i, \ldots, n$$

# Modelli multi-periodo

- Un'industria manifatturiera fabbrica due tipi di prodotti $P_1$ e $P_2$
- ogni prodotto finito richiede 4 Kg di materiale grezzo e l'utilizzo di due macchine: una per la levigatura e una per la pulitura
- la disponibilità massima settimanale della levigatrice è $80$ ore mentre quella della pulitrice è $60$ ore.
- il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina per ciascun prodotto finito è il seguente

| | $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| levigatura | 4 | 2 |
| pulitura | 2 | 5 |

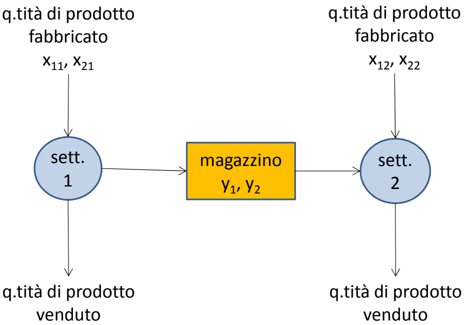
# Modelli multi-periodo

- si deve programmare la produzione nelle due successive settimane
- nella prima si potranno vendere al più $12$ prodotti $P_1$ e $4$ prodotti $P_2$, mentre nella seconda al più $8$ prodotti $P_1$ e $12$ prodotti $P_2$
- i prodotti fabbricati nella settimana $1$ possono anche essere tenuti in **magazzino** e venduti nella settimana $2$, al costo unitario di $2$ Euro (indipendente dal tipo)
- l'industria dispone settimanalmente di 75 Kg di materiale grezzo
- vendendo un'unità di prodotto $P_1$ si ricavano $10$ EUR nella settimana 1 e $11$ EUR nella settimana 2; i ricavi per $P_2$ sono risp. $15$ e $8$ EUR.

Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto (ricavo $-$ costo) complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti nelle due settimane

# Formulazione

- variabili decisionali: $x_{ij}$ quantità di prodotto $P_i$, $i = 1, 2$ fabbricato nella settimana $j$, $j = 1, 2$; $y_1, y_2$ quantità di prodotto risp. $P_1$ e $P_2$ immagazzinato




- funzione obiettivo:
  ricavo prima settimana: $10(x_{11} - y_1) + 15(x_{21} - y_2)$
  ricavo seconda settimana: $11(x_{12} + y_1) + 8(x_{22} + y_2)$
  costo magazzino: $2(y_1 + y_2)$

# Formulazione

- vincoli sulla capacità produttiva

$$4x_{11} + 2x_{21} \leq 80$$
$$2x_{11} + 5x_{21} \leq 60$$
$$4x_{12} + 2x_{22} \leq 80$$
$$2x_{12} + 5x_{22} \leq 60$$

- vincoli sulla disponibilità di materia prima

$$4x_{11} + 4x_{21} \leq 75$$
$$4x_{12} + 4x_{22} \leq 75$$

# Formulazione

- vincoli sulla domanda

$$
\begin{aligned}
x_{11} - y_1 &\leq 12 \\
x_{21} - y_2 &\leq 4 \\
x_{12} + y_1 &\leq 8 \\
x_{22} + y_2 &\leq 12
\end{aligned}
$$

- vincoli di non negatività

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$