Modelli di PL: trasporti

- Problema dei trasporti: un esempio
- Caso generale

Trasporto di acque minerali

- Un'industria di acque minerali ha due stabilimenti per il trattamento delle acque (Viterbo, Latina) e tre impianti di imbottigliamento (Napoli, Roma, Avezzano)
- gli impianti devono essere riforniti giornalmente di $30, 40, 35$ ettolitri risp.
- gli stabilimenti trattano giornalmente 50 e 55 ettolitri risp.
- il costo (Euro) per il trasporto di un ettolitro di acqua da ciascuno stabilimento a ciascun impianto è il seguente

	Napoli	Roma	Avezzano
Viterbo	250	100	85
Latina	120	80	150

Formulare il problema di PL che permetta di determinare la quantità di acqua da trasportare da ciascuno stabilimento a ciascun impianto in modo da soddisfare le esigenze degli impianti, non lasciare giacenze negli stabilimenti e minimizzando il costo di trasporto

Formulazione

- variabili decisionali: x_{ij} ettolitri da trasportare dall'origine i alla destinazione j, con $i \in [V, L], j \in [N, R, A]$
- funzione obiettivo: costo del trasporto

$$\min 250x_{VN} + 100x_{VR} + 85x_{VA} + 120x_{LN} + 80x_{LR} + 150x_{LA}$$

- vincoli sull'assenza di giacenze

$$x_{VN} + x_{VR} + x_{VA} = 50$$
$$x_{LN} + x_{LR} + x_{LA} = 55$$

- vincoli di domanda

$$x_{VN} + x_{LN} = 30$$
$$x_{VR} + x_{LR} = 40$$
$$x_{VA} + x_{LA} = 35$$

- vincoli di non negatività

$$x_{VN}, x_{VR}, x_{VA}, x_{LN}, x_{LR}, x_{LA} \geq 0$$

Formulazione generale di un problema di trasporti

- $O_1, \ldots, O_m$ località *origine*, ciascuna caratterizzata da un'*offerta* a_i di bene
- $D_1, \ldots, D_n$ località *destinazione*, ciascuna caratterizzata da una *richiesta* b_j di bene
- costo c_{ij} di trasporto di una unità di bene dall'origine i alla destinazione j
- vincoli sulla offerta/domanda
  - ipotesi:
    $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$
  - tutto il bene disponibile in ciascuna origine deve essere trasportato (no giacenze)
  - tutta la richiesta di bene in ciascuna destinazione deve essere soddisfatta esattamente (no eccessi)
- determinare un modello di PL che corrisponda a minimizzare il costo complessivo di trasporto

Formulazione

- variabili decisionali: x_{ij} quantità di bene da trasportare dall' origine O_i, $i = 1, \dots, m$ alla destinazione D_j, $j = 1, \dots, n$
- funzione obiettivo:
$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$
- vincoli sull'offerta:
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, \dots, m$$
- vincoli sulla domanda:
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, \dots, n$$
- vincoli di non-negatività: $x_{ij} \geq 0 \; i = 1, \dots m, \; j = 1, \dots, n$

Analisi

Problema dei trasporti:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \dots m, j = 1, \dots, n$$

Teorema

Il problema dei trasporti ammette una soluzione ammissibile se e solo se $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Dimostrazione

Necessità. Affinche una soluzione $\bar{x}_{ij}$ sia ammissibile deve essere:

$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$ (somma dei vincoli offerta)

$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (somma dei vincoli domanda)

quindi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = 0$$

Dimostrazione

Sufficienza. Supponiamo che $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = A$ e dimostriamo che esiste una sol. ammissibile. Si scelga la soluzione

$$\bar{x}_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}, \qquad i = 1, \dots m, j = 1, \dots, n$$

Si ha:

•$\bar{x}_{ij} \geq 0$ per la non-negatività degli a_i, b_j

• $\sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^n b_j = a_i$

• $\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^m a_j = b_j$

quindi $\bar{x}_{ij}$ è soluzione ammissibile per il problema dei trasporti

Analisi: interezza delle soluzioni

Teorema
Se nel problema dei trasporti le a_i, $i = 1, \ldots, m$ e le b_j, $j = 1, \ldots, n$ sono intere e se il problema ammette soluzione ottima, allora ha una soluzione ottima intera.

Questo risultato ci consente di eliminare i vincoli di interezza e di utilizzare un algoritmo di PL anche in presenza di beni indivisibili

Varianti del problema

- alcune coppie O/D possono non essere collegate
- il collegamento fra certe coppie O/D può avere capacità limitata
- può esserci eccesso di offerta: $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$; in questo caso i vincoli diventano
  - $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m$
  - $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \ldots, n$
- per ricondurlo alla formulazione con vincoli di uguaglianza, si può introdurre una destinazione fittizia che abbia una richiesta pari a $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ ed un costo di trasporto nullo da ogni origine