

Formulazione di problemi con valori assoluti

- ▶ funzioni convesse lineari a tratti
- ▶ problemi con valori assoluti
- ▶ regressione lineare

rif. BT 1.3

Max di funzioni convesse

Teorema

Siano $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni convesse. Allora la funzione $f(\mathbf{x}) = \max_{i=1, \dots, m} f_i(\mathbf{x})$ è convessa

Dimostrazione Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$. Si ha che:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) &= \max_{i=1, \dots, m} f_i(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, m} (\lambda f_i(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f_i(\mathbf{y})) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, m} \lambda f_i(\mathbf{x}) + \max_{i=1, \dots, m} (1 - \lambda) f_i(\mathbf{y}) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$



Somma di funzioni convesse

Teorema

Siano $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni convesse. Allora la funzione $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x})$ è convessa

Dimostrazione Proviamo il risultato per $m = 2$, il caso generale segue per induzione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$. Si ha che:

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) = f_1(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) + f_2(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y})$$

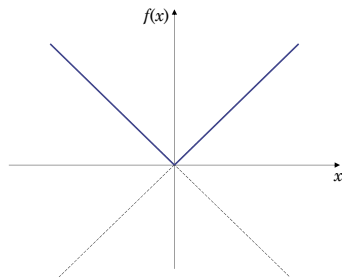
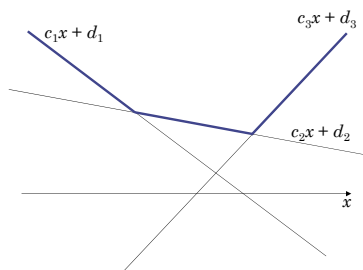
$$\leq \lambda f_1(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f_1(\mathbf{y}) + \lambda f_2(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f_2(\mathbf{y})$$

$$= \lambda(f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})) + (1 - \lambda)(f_1(\mathbf{y}) + f_2(\mathbf{y})) = \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y})$$



Funzioni convesse lineari a tratti

Una funzione del tipo $\max_{i=1,\dots,m}(\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i)$ è detta funzione *convessa lineare a tratti*



$$f(x) = |x| = \max\{x, -x\}$$

Generalizzazione del problema di PL

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{i=1,\dots,m} (\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \end{aligned}$$

Si osservi che $\max_{i=1,\dots,m} (\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i)$ è uguale al minimo numero z che soddisfa $z \geq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i$. Quindi, è equivalente al problema di PL

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & z \geq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \end{aligned}$$

Allo stesso modo, un vincolo $f(\mathbf{x}) = \max_{i=1,\dots,m} (\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + g_i) \leq h$ può essere sostituito dagli m vincoli

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + g_i \leq h, \quad , i = 1, \dots, m$$

Problemi con valori assoluti

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1, \dots, n} c_i |x_i| \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \end{aligned}$$

in cui assumiamo $c_i \geq 0$.

Osserviamo che $|x_i|$ è pari al più piccolo numero z_i tale che $z_i \geq x_i$ e $z_i \geq -x_i$. Quindi otteniamo il problema di PL equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1, \dots, n} c_i z_i \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & z_i \geq x_i \\ & z_i \geq -x_i \end{aligned}$$

Esercizio

$$\begin{aligned} & \min 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ \text{s.t.} \quad & |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5 \end{aligned}$$

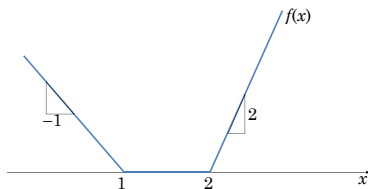
riformulazione lineare:

$$\begin{aligned} & \min 2x_1 + 3z_1 \\ \text{s.t.} \quad & z_2 + z_3 \leq 5 \\ & z_1 \geq x_2 - 10 \\ & z_1 \geq -x_2 + 10 \\ & z_2 \geq x_1 + 2 \\ & z_2 \geq -x_1 - 2 \\ & z_3 \geq x_2 \\ & z_3 \geq -x_2 \end{aligned}$$

Esercizio

Consideriamo un problema della forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + f(\mathbf{d}^T \mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \end{aligned}$$



Osserviamo che $f(x) = \max\{1 - x, 0, 2x - 4\}$. Quindi otteniamo la riformulazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + z \\ \text{s.t.} \quad & z \geq -\mathbf{d}^T \mathbf{x} + 1 \\ & z \geq 0 \\ & z \geq 2\mathbf{d}^T \mathbf{x} - 4 \\ & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \end{aligned}$$

Regressione lineare

Nei problemi di classificazione un data-set composto da coppie $(\mathbf{a}_i, b_i), i = 1, \dots, m$, in cui $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ è un'osservazione e $b_i \in \mathbb{R}$ il corrispondente risultato.

Un modello di regressione lineare consiste in un vettore \mathbf{x} (da determinare) per cui il risultato di una generica osservazione \mathbf{a} possa rappresentarsi come $b = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$

Tale vettore è scelto in modo da minimizzare l'errore sui campioni del data-set:

- ▶ criterio I: minimizzare lo scarto massimo

$$\max_{i=1, \dots, m} |b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}|$$

- ▶ criterio II: minimizzare la somma degli scarti $\sum_{i=1}^m |b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}|$

Regressione lineare: formulazione di PL

criterio I:

$$\begin{aligned} & \min z \\ \text{s.t.} \quad & z \geq b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}, i = 1, \dots, m \\ & z \geq -b_i + \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}, i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

criterio II:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1, \dots, m} z_i \\ \text{s.t.} \quad & z_i \geq b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}, i = 1, \dots, m \\ & z_i \geq -b_i + \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}, i = 1, \dots, m \end{aligned}$$