AIMETA`01
XV Congresso AIMETA di Meccanica Teorica e Applicata
15th AIMETA Congress of Theoretical and Applied Mechanics

(IPER-)TENSIONI & EQUI-POTENZA

A. DI CARLO[1], A. TATONE[2]

[1]*Dipartimento di Scienze dell'Ingegneria Civile, Università "Roma Tre", Roma*
[2]*Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, delle Acque e del Terreno, Università dell'Aquila, L'Aquila*

SOMMARIO
Si propone un approccio alternativo alla costruzione della tensione di Cauchy (e degli analoghi costrutti di ordine superiore, generalmente denominati *iper-tensioni*), per il quale la nozione fondamentale è quella di potenza spesa su atti di moto test, invece che quella di forza risultante. Il tensore tensione di Cauchy emerge come la grandezza appropriata a caratterizzare le classi di equipotenza sugli atti di moto di grado 1 delle distribuzioni superficiali che spendono potenza nulla su quelli di grado 0. Due distribuzioni caratterizzate dalla stessa 1-tensione (denominazione serializzata della tensione di Cauchy) non sono in generale equi-potenti su atti di moto di grado superiore ad 1. Per discriminare le classi di equipotenza via via più fini che emergono al crescere del grado della teoria, è necessario introdurre una iper-tensione per ogni grado in più. Si mostra che alla 2-tensione corrispondono, oltre all'ordinaria distribuzione di forze di faccia, anche forze di spigolo e doppie forze di faccia; analogamente, alla 3-tensione corrispondono - oltre alle precedenti - forze di vertice, doppie forze di spigolo e triple forze di faccia.

ABSTRACT
An alternative approach to the Cauchy stress (together with higher order stresses, usually called hyper-stresses) is proposed, relying on the notion of power expended on test velocity fields, instead of the notion of resultant force. The stress tensor arises as the appropriate descriptor of equipowerful classes, on test velocity fields of grade 1, of surface distributions expending no power on test velocity fields of grade 0. Two different distributions characterized by the same 1-stress (serialized name for the Cauchy stress) do not belong to the same equipowerful class of higher grade in general. In order to characterize higher equipowerful classes we need one more hyper-stress for each increment of the grade of the theory. It can be shown that a 2-stress corresponds to edge forces and surface double forces, besides the ordinary surface distribution. Similarly a 3-stress corresponds to vertex forces, edge double forces and surface triple forces, besides the previous ones.

1. INTRODUZIONE

Proponiamo un approccio alternativo alla costruzione della tensione di Cauchy (e degli analoghi costrutti di ordine superiore, generalmente denominati *iper-tensioni*), per il quale la nozione fondamentale è quella di potenza spesa su atti di moto test, invece che quella di forza risultante.

La domanda che ci poniamo è la seguente: che cosa caratterizza le distribuzioni superficiali di forza *equi-potenti* su ogni campo spaziale di velocità appartenente allo spazio dei polinomi di un assegnato grado $m > 0$? Il tensore tensione di Cauchy ne emerge come la grandezza appropriata a caratterizzare le classi di equipotenza sugli atti di moto di grado 1 delle distribuzioni superficiali che spendono potenza nulla su quelli di grado 0. In un certo senso, per noi la nozione di tensione *media* di Signorini precede logicamente quella di tensione puntuale (il che sembra soddisfacente, essendo la prima una nozione integrale).

Naturalmente, due distribuzioni caratterizzate dalla stessa 1-tensione (denominazione serializzata della tensione di Cauchy) non sono in generale equi-potenti su atti di moto di grado superiore ad 1. Per discriminare le classi di equipotenza via via più fini che emergono al crescere del grado della teoria, è necessario introdurre una iper-tensione per ogni grado in più. Mostriamo che alla 2-tensione corrispondono, oltre all'ordinaria distribuzione di forze di faccia, anche forze di spigolo e doppie forze di faccia; analogamente, alla 3-tensione corrispondono - oltre alle precedenti - forze di vertice, doppie forze di spigolo e triple forze di faccia.

Mostriamo per prima cosa come si possa realizzare su un corpo di forma regolare $\mathcal{R}$ una distribuzione di forze che appartenga ad una classe di equipotenza. A questo scopo sono utilizzati successivamente atti di moto di grado crescente. Le corrispondenti espressioni della potenza sono caratterizzate da "momenti" e da "tensioni medie" di grado via via crescente.

Presentiamo poi una procedura per la realizzazione di distribuzioni di forze adattata al caso di parallelepipedi. Questa scelta non è però limitativa poiché, qualunque sia il grado m della teoria, è sufficiente lavorare con n-intervalli (cioè, con parallelepipedi fustellati nel corpo - una varietà n-dimensionale - e immersi nello spazio ambiente, avente dimensione $N \geq n$). Ciò è suggerito da recenti risultati di teoria geometrica della misura nei quali, partendo da enti definiti su n-intervalli, si giunge a trattare il caso generale di insiemi di perimetro finito ([5]).

La nozione di equipotenza fa riferimento alla nozione di potenza virtuale introdotta in [1]. La distribuzione di forze rappresentativa di classi di equipotenza di grado 2 corrisponde a quella ottenuta in [3].

2. ATTI DI MOTO AFFINI

Si consideri un corpo nella forma $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ spazio euclideo di dimensione 3. Lo spazio degli atti di moto sia costituito dai campi vettoriali

$$v(x) = w + G(x - x_\circ). \tag{1}$$

con

$$w \in \mathcal{V}, \quad G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}. \tag{2}$$

La potenza

$$\mathcal{W}_{\mathcal{R}}(v) := \mathcal{W}_{\mathcal{R}}^{out}(v) + \mathcal{W}_{\mathcal{R}}^{in}(v) \tag{3}$$

sia definita da

$$\mathcal{W}^{out}_{\mathcal{R}}(v) := (b \cdot w + L \cdot G\,)\,\mathrm{vol}\,(\mathcal{R}), \tag{4}$$
$$\mathcal{W}^{in}_{\mathcal{R}}(v) := -(z \cdot w + T \cdot G\,)\,\mathrm{vol}\,(\mathcal{R}). \tag{5}$$

Un atto di moto rigido è descritto dalla coppia

$$\big(\,w\,,\,W\,\big), \tag{6}$$

con W antisimmetrico. Assumendo $\mathcal{W}^{in}_{\mathcal{R}}(v) = 0$ per ogni atto di moto rigido si ottiene la seguente richiesta costitutiva

$$z = o, \quad \mathrm{skw}\,T = O. \tag{7}$$

Assumendo $\mathcal{W}_{\mathcal{R}}(v) = 0$ per ogni atto di moto, si ottengono le equazioni di bilancio

$$b = o, \quad \mathrm{skw}\,L = O, \quad \mathrm{sym}\,L = T. \tag{8}$$

Vogliamo ora costruire esempi di distribuzioni di forze equipotenti. Tali distribuzioni sono caratterizzate, per la (4), dallo stesso valore di b e di L. In particolare prenderemo in esame solo distribuzioni con $b = o$. [1]

Il primo e più interessante esempio è dato dalla distribuzione superficiale

$$t := Ln, \tag{9}$$

dove n è la normale esterna al bordo $\partial\mathcal{R}$, assunto regolare a tratti. La potenza è

$$\mathcal{W}^{out}_{\mathcal{R}}(v) = \int_{\partial\mathcal{R}} t \cdot v = \int_{\partial\mathcal{R}} t \cdot w + \int_{\partial\mathcal{R}} t \cdot Gr = \int_{\partial\mathcal{R}} Ln \cdot w + \int_{\partial\mathcal{R}} Ln \cdot Gr, \tag{10}$$

dove $r := (x - x_{\mathsf{o}})$. Poiché

$$\int_{\partial\mathcal{R}} Ln = L \int_{\partial\mathcal{R}} n = o, \tag{11}$$

per il teorema della divergenza risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{out}_{\mathcal{R}}(v) = \int_{\partial\mathcal{R}} Ln \cdot Gr &= \int_{\partial\mathcal{R}} r \otimes Ln \cdot G = L \int_{\partial\mathcal{R}} r \otimes n \cdot G \\ &= L \int_{\mathcal{R}} \mathrm{grad}\, r \cdot G = L \cdot G\,\mathrm{vol}\,(\mathcal{R}). \end{aligned} \tag{12}$$

In alternativa si può considerare la distribuzione, definita su $\mathcal{R}$,

$$p(x) := Ar_{\mathsf{c}}, \tag{13}$$

dove A è un endomorfismo di $\mathcal{V}$, $r_{\mathsf{c}} := (x - x_{\mathsf{c}})$ e x_{c} è il baricentro di $\mathcal{R}$. La potenza è

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{out}_{\mathcal{R}}(v) &= \int_{\mathcal{R}} p \cdot v = \int_{\mathcal{R}} p \cdot w + \int_{\mathcal{R}} p \cdot Gr \\ &= \int_{\mathcal{R}} Ar_{\mathsf{c}} \cdot w + \int_{\mathcal{R}} r \otimes Ar_{\mathsf{c}} \cdot G. \end{aligned} \tag{14}$$

[1] Tutto ciò può essere applicato anche al caso di corpo rigido, riguardando questo come un corpo affine vincolato, attribuendo a T il significato di tensione reattiva.

Poiché risulta

$$\int_{\mathcal{R}} A r_{\mathsf{c}} = 0, \tag{15}$$

l'ultima espressione può essere trasformata nel modo seguente

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} r \otimes A r_{\mathsf{c}} \cdot G &= A \int_{\mathcal{R}} r \otimes r_{\mathsf{c}} \cdot G \\ &= A \int_{\mathcal{R}} r_{\mathsf{c}} \otimes r_{\mathsf{c}} \cdot G = AJ \cdot G, \end{aligned} \tag{16}$$

essendo J il tensore di Eulero. Affinchè sia $\mathcal{W}^{out}_{\mathcal{R}}(v) = L \cdot G \operatorname{vol}(\mathcal{R})$ è sufficiente porre $A := LJ^{-1} \operatorname{vol}(\mathcal{R})$. La espressione di p diventa

$$p(x) = L \left(\frac{J}{\operatorname{vol}(\mathcal{R})} \right)^{-1} r_{\mathsf{c}}. \tag{17}$$

Si consideri ora un particolare L (o equivalentemente, attraverso le (8), un particolare T) e ci si ponga l'obiettivo di realizzare una distribuzione di forze su corpi di forma $\mathcal{R}_\varepsilon$, di potenza $L \cdot G \operatorname{vol}(\mathcal{R}_\varepsilon)$. Per una successione $\mathcal{R}_\varepsilon \subset \mathcal{B}_\varepsilon$, con $\mathcal{B}_\varepsilon$ successione di sfere di raggio ε decrescente, risulta che per ogni ε le due distribuzioni (9) e (17) appartengono alla stessa classe di equipotenza. Accade però che $\lim_{\varepsilon \to 0} ||p(x)|| = \infty$, mentre la espressione (9) si mantiene costante con ε.

Un'altra osservazione è la seguente. Se si considera al posto della (9) una distribuzione superficiale

$$t := Ln + \widetilde{t}, \tag{18}$$

si ottiene, per le proprietà di Ln già esaminate, la condizione

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \widetilde{t} \cdot w = 0, \quad \int_{\partial\mathcal{R}} \widetilde{t} \cdot Gr = 0. \tag{19}$$

Pertanto $\widetilde{t}$ è una distribuzione superficiale di forze che spende potenza nulla in atti di moto di grado 0 e 1.

Un caso più interessante si ottiene considerando assieme alla distribuzione superficiale (18) una distribuzione uniforme su $\mathcal{R}$

$$p(x) := p_{\mathsf{o}}. \tag{20}$$

Assumendo $x_{\mathsf{o}} = x_{\mathsf{c}}$, il baricentro di $\mathcal{R}$, si ha

$$p_{\mathsf{o}} \cdot w + \frac{1}{\operatorname{vol}(\mathcal{R})} \int_{\partial\mathcal{R}} \widetilde{t} \cdot w = 0, \quad \int_{\partial\mathcal{R}} \widetilde{t} \cdot Gr = 0. \tag{21}$$

Si noti infine che, per L simmetrico, la distribuzione (18) appartiene alla classe di equipotenza definita, per via delle (8), dalla 1-tensione T.

3. ATTI DI MOTO DI GRADO DUE

Si consideri un corpo nella forma $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ spazio euclideo di dimensione 3. Lo spazio degli atti di moto sia costituito dai campi vettoriali

$$v(x) = w + Gr + \frac{1}{2}\mathbb{G}rr, \tag{22}$$

dove

$$w \in \mathcal{V}, \quad G : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \quad \mathbb{G} : \mathcal{U} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \tag{23}$$

con le seguenti condizioni di simmetria[2]

$$\mathbb{G}uv = \mathbb{G}vu, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \forall v \in \mathcal{U}. \tag{24}$$

La potenza (3) sia definita da

$$\mathcal{W}_{\mathcal{R}}^{out}(v) := (b \cdot w + L \cdot G + \mathbb{L} \cdot \mathbb{G})\,\mathrm{vol}\,(\mathcal{R}), \tag{25}$$

$$\mathcal{W}_{\mathcal{R}}^{in}(v) := -(z \cdot w + T \cdot G + \mathbb{T} \cdot \mathbb{G})\,\mathrm{vol}\,(\mathcal{R}). \tag{26}$$

Sia il tensore $\mathbb{L}$ che la 2-tensione $\mathbb{T}$ così definiti ereditano la proprietà di simmetria (24) da $\mathbb{G}$. Un atto di moto rigido sia descritto dalla terna

$$\big(\, w \,,\, W \,,\, \mathbb{O} \,\big), \tag{27}$$

dove W è antisimmetrico e $\mathbb{O}$ è il tensore nullo. Assumendo $\mathcal{W}_{\mathcal{R}}^{in}(v) = 0$ per ogni atto di moto rigido si ottiene la seguente richiesta costitutiva

$$z = 0, \quad \mathrm{skw}\,T = O. \tag{28}$$

Assumendo $\mathcal{W}_{\mathcal{R}}(v) = 0$ per ogni atto di moto, si ottengono le equazioni di bilancio

$$b = o, \quad \mathrm{skw}\,L = O, \quad \mathrm{sym}\,L = T, \quad \mathbb{L} = \mathbb{T}. \tag{29}$$

Vogliamo ora costruire esempi di distribuzioni di forze equipotenti. Tali distribuzioni sono caratterizzate, per la (25), dallo stesso valore di b, L e $\mathbb{L}$. In particolare prenderemo in esame distribuzioni con $b = o$ e $L = O$. Si osservi per prima cosa che

$$\int_{\partial\mathcal{R}} r \otimes \mathbb{L}n = \mathbb{L}\int_{\partial\mathcal{R}} r \otimes n = \mathbb{L}\int_{\mathcal{R}} \mathrm{grad}\, r = \mathbb{L}\,\mathrm{vol}(\mathcal{R}). \tag{30}$$

La potenza corrispondente al gradiente secondo $\mathbb{G}$ può essere pertanto posta nella forma

$$\mathbb{L} \cdot \mathbb{G}\,\mathrm{vol}(\mathcal{R}) = \int_{\partial\mathcal{R}} r \otimes \mathbb{L}n \cdot \mathbb{G} = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbb{L}n \cdot \mathbb{G}r. \tag{31}$$

[2] Nell'uso della espressione "condizioni di simmetria" si allude alla interpretazione di $\mathbb{G}$ come tensore $\mathbb{G} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Questa ipotesi è motivata dal fatto che sia il gradiente primo che il gradiente secondo del campo (22) risulterebbero indipendenti dalla parte "antisimmetrica" di $\mathbb{G}$.

Assumendo che il bordo $\partial\mathcal{R}$ sia regolare a tratti, si consideri la decomposizione

$$\partial\mathcal{R} = \bigcup_i^N \mathcal{F}_i \tag{32}$$

in facce regolari con bordo regolare a tratti, senza sovrapposizioni. Dalla (31) si ottiene

$$\mathbb{L} \cdot \mathbb{G}\,\mathrm{vol}(\mathcal{R}) = \sum_i^N \int_{\mathcal{F}_i} \mathbb{L}n \cdot \mathbb{G}r. \tag{33}$$

Per ciascuna faccia $\mathcal{F}_i$ possiamo definire in ogni $x \in \mathcal{F}_i$ la proiezione ortogonale sullo spazio tangente $P : \mathcal{V} \to \mathcal{T}$ e il suo complemento $V := I - P$. Questo permette di costruire la seguente decomposizione

$$\mathbb{L}n \cdot \mathbb{G}r = (\mathbb{L}n)V^{\mathsf{T}} \cdot (\mathbb{G}r)V + (\mathbb{L}n)P^{\mathsf{T}} \cdot (\mathbb{G}r)P. \tag{34}$$

Ora si può congetturare che il secondo termine nella espressione qui sopra non sia altro che la potenza di una distibuzione uniforme di forze $(\mathbb{L}n)m$ lungo il bordo $\partial\mathcal{F}_i$. Si esamini la espressione

$$\int_{\partial\mathcal{F}_i} \mathbb{L}nm \cdot \mathbb{G}rr \tag{35}$$

cercando di metterla in relazione con la (34). Applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{F}_i} \mathbb{L}nm \cdot \mathbb{G}rr &= \int_{\partial\mathcal{F}_i} m \cdot (\mathbb{L}n)^{\mathsf{T}}\mathbb{G}rr \\ &= \int_{\mathcal{F}_i} \mathrm{div}_s \big(P(\mathbb{L}n)^{\mathsf{T}}\mathbb{G}rr\big) \\ &= \int_{\mathcal{F}_i} \mathrm{tr}\,\big(P\,\mathrm{grad}_s\,\big(P(\mathbb{L}n)^{\mathsf{T}}\mathbb{G}rr\big)\big). \end{aligned} \tag{36}$$

Utilizzando le proprietà di simmetria di $\mathbb{G}$ si deriva la seguente espressione del gradiente applicato ad un qualsiasi vettore tangente a

$$\begin{aligned} &P\,\mathrm{grad}_s\big(P(\mathbb{L}n)^{\mathsf{T}}\mathbb{G}rr\big)a \\ &\quad= 2P(\mathbb{L}n)^{\mathsf{T}}\mathbb{G}ra + P(\mathbb{L}(\mathrm{grad}_s\,n)a)^{\mathsf{T}}\mathbb{G}rr - (n \otimes (\mathrm{grad}_s\,n)a)(\mathbb{L}n)^{\mathsf{T}}\mathbb{G}rr \\ &\quad= 2P(\mathbb{L}n)^{\mathsf{T}}\mathbb{G}ra + P(\mathbb{L}(\mathrm{grad}_s\,n)a)^{\mathsf{T}}\mathbb{G}rr - (\mathbb{L}nn \cdot \mathbb{G}rr)(\mathrm{grad}_s\,n)a, \end{aligned} \tag{37}$$

da cui si ottiene infine

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_s\big(P(\mathbb{L}n)^{\mathsf{T}}\mathbb{G}rr\big) &= 2(\mathbb{L}n)P^{\mathsf{T}} \cdot \mathbb{G}rP \\ &\quad+ \big(k_1\mathbb{L}a_1a_1 + k_2\mathbb{L}a_2a_2 - (k_1+k_2)\mathbb{L}nn\big) \cdot \mathbb{G}rr. \end{aligned} \tag{38}$$

Qui con a_1 e a_2 sono indicati gli autovettori del tensore di Weingarten $(\mathrm{grad}_s\,n)$, con k_1 e k_2 le corrispondenti curvature principali. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{F}_i} \mathbb{L}nm \cdot \mathbb{G}rr &= 2\int_{\mathcal{F}_i} (\mathbb{L}n)P^{\mathsf{T}} \cdot \mathbb{G}rP \\ &\quad+ \int_{\mathcal{F}_i} \big(k_1\mathbb{L}a_1a_1 + k_2\mathbb{L}a_2a_2 - (k_1+k_2)\mathbb{L}nn\big) \cdot \mathbb{G}rr \end{aligned} \tag{39}$$

da cui si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}_i} (\mathbb{L}n)P^{\mathsf{T}} \cdot \mathbb{G}rP &= \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{F}_i} \mathbb{L}nm \cdot \mathbb{G}rr \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{F}_i} \big(-k_1\mathbb{L}a_1a_1 - k_2\mathbb{L}a_2a_2 + (k_1+k_2)\mathbb{L}nn\big)\cdot \mathbb{G}rr.
\end{aligned} \tag{40}
$$

Sostituendo la (40) nella (33) per mezzo della (34) si ottiene infine

$$
\begin{aligned}
\mathbb{L}\cdot\mathbb{G}\,\mathrm{vol}(\mathcal{R}) = \sum_i^N \Big(&\int_{\mathcal{F}_i} \mathbb{L}nn \cdot \mathbb{G}rn + \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{F}_i} \mathbb{L}nm \cdot \mathbb{G}rr \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{F}_i} \big(-k_1\mathbb{L}a_1a_1 - k_2\mathbb{L}a_2a_2 + (k_1+k_2)\mathbb{L}nn\big)\cdot \mathbb{G}rr\Big).
\end{aligned} \tag{41}
$$

La potenza corrispondente a $\mathbb{L}$ è dunque realizzabile attraverso una distribuzione di *forze di spigolo* $\mathbb{L}nm$, una distribuzione di *doppie forze di faccia* $\mathbb{L}nn$, una distribuzione di *forze superficiali* $\big(-k_1\mathbb{L}a_1a_1 - k_2\mathbb{L}a_2a_2 + (k_1+k_2)\mathbb{L}nn\big)$.

Per via delle (29), tali distribuzioni possono essere viste come rappresentanti della classe di equipotenza definita dalla 2-tensione $\mathbb{T}$.

4. PARALLELEPIPEDI

Si consideri un corpo a forma di un parallelepipedo, con spigoli generati dalla terna ortonormale di vettori $\{e_1, e_2, e_3\}$ e di lunghezza h_1, h_2, h_3. È possibile costruire direttamente una espressione della potenza (25) che sia interpretabile come potenza di distribuzioni di forze sul bordo, corrispondente alla (41). Si noti infatti che, poiché

$$
\begin{aligned}
L\cdot G &= L(e_1\otimes e_1 + e_2\otimes e_2 + e_3\otimes e_3)\cdot G \\
&= Le_1\cdot Ge_1 + Le_2\cdot Ge_2 + Le_3\cdot Ge_3,
\end{aligned} \tag{42}
$$

risulta

$$
(h_1h_2h_3)L\cdot G = (h_2h_3)Le_1\cdot G(h_1e_1) + (h_3h_1)Le_2\cdot G(h_2e_2) + (h_1h_2)Le_3\cdot G(h_3e_3) \tag{43}
$$

Poiché

$$
G(h_1e_1),\quad G(h_2e_2),\quad G(h_3e_3) \tag{44}
$$

sono le differenze (prime) di velocità nelle direzioni e_1, e_2, e_3, i termini

$$
Le_1,\quad Le_2,\quad Le_3 \tag{45}
$$

sono interpretabili come distribuzioni uniformi di forze superficiali sulle facce di normale e_1, e_2, e_3, essendo (h_2h_3), (h_3h_1), (h_1h_2) le aree di tali facce. Si osservi che, come per la potenza di grado 1, risulta

$$
\begin{aligned}
\mathbb{L}\cdot\mathbb{G} &= \mathbb{L}(e_1\otimes e_1 + e_2\otimes e_2 + e_3\otimes e_3)\cdot\mathbb{G} \\
&= \mathbb{L}e_1\cdot\mathbb{G}e_1 + \mathbb{L}e_2\cdot\mathbb{G}e_2 + \mathbb{L}e_3\cdot\mathbb{G}e_3.
\end{aligned} \tag{46}
$$

Ciascuno dei termini di tale somma può essere a sua volta trasformato allo stesso modo, ottenendo infine, anche per le condizioni di simmetria,

$$
\begin{aligned}
(h_1 h_2 h_3)\, \mathbb{L} \cdot \mathbb{G} = (h_2 h_3)\mathbb{L} e_1 e_1 \cdot \mathbb{G}(h_1 e_1) e_1 & \\
+ (h_3 h_1)\mathbb{L} e_2 e_2 \cdot \mathbb{G}(h_2 e_2) e_2 & \\
+ (h_1 h_2)\mathbb{L} e_3 e_3 \cdot \mathbb{G}(h_3 e_3) e_3 & \\
+ 2\, h_1 \mathbb{L} e_2 e_3 \cdot \mathbb{G}(h_2 e_2)(h_3 e_3) & \\
+ 2\, h_2 \mathbb{L} e_3 e_1 \cdot \mathbb{G}(h_3 e_3)(h_1 e_1) & \\
+ 2\, h_3 \mathbb{L} e_1 e_2 \cdot \mathbb{G}(h_1 e_1)(h_2 e_2). &
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Indicando le velocità al centro degli spigoli con la regola implicita nelle seguenti definizioni

$$
\begin{aligned}
v_{+1+2} &:= v\big(x_\circ + \frac{h_1}{2} e_1 + \frac{h_2}{2} e_2\big), \\
v_{+1-2} &:= v\big(x_\circ + \frac{h_1}{2} e_1 - \frac{h_2}{2} e_2\big), \\
v_{-1+2} &:= v\big(x_\circ - \frac{h_1}{2} e_1 + \frac{h_2}{2} e_2\big), \\
v_{-1-2} &:= v\big(x_\circ - \frac{h_1}{2} e_1 - \frac{h_2}{2} e_2\big),
\end{aligned}
\tag{48}
$$

attraverso la (22) risulta

$$
(v_{+1+2} - v_{+1-2}) - (v_{-1+2} - v_{-1-2}) = \mathbb{G}(h_1 e_1)(h_2 e_2). \tag{49}
$$

Le espressioni

$$
\mathbb{G}(h_1 e_1)(h_2 e_2), \quad \mathbb{G}(h_2 e_2)(h_3 e_3), \quad \mathbb{G}(h_3 e_3)(h_1 e_1) \tag{50}
$$

sono dunque le differenze (seconde) della velocità di spigoli opposti. Corrispondentemente i termini

$$
\mathbb{L} e_1 e_2, \quad \mathbb{L} e_2 e_3, \quad \mathbb{L} e_3 e_1. \tag{51}
$$

hanno il significato di *forze di spigolo.* Poichè

$$
\mathbb{G}(h_1 e_1) e_1, \quad \mathbb{G}(h_2 e_2) e_2, \quad \mathbb{G}(h_3 e_3) e_3 \tag{52}
$$

sono le derivate normali della velocità sia sulle facce di normale e_1, e_2, e_3 che sulle facce opposte, i termini

$$
\mathbb{L} e_1 e_1, \quad \mathbb{L} e_2 e_2, \quad \mathbb{L} e_3 e_3 \tag{53}
$$

hanno il significato di *doppie forze di faccia.*

5. ATTI DI MOTO DI GRADO TRE

Nel caso di corpo a forma di parallelepido, con spigoli generati dalla terna ortonormale di vettori $\{e_1, e_2, e_3\}$, si assuma che lo spazio degli atti di moto sia costitutito dai campi di grado 3

$$v(x) = w + Gr + \frac{1}{2}\mathbb{G}rr + \frac{1}{6}\mathsf{G}rrr \tag{54}$$

con

$$w \in \mathcal{V}, \quad G : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \quad \mathbb{G} : \mathcal{U} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \quad \mathsf{G} : \mathcal{U} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{V})). \tag{55}$$

La potenza (3) sia definita da

$$\mathcal{W}^{out}_{\mathcal{R}}(v) := (b \cdot w + L \cdot G + \mathbb{L} \cdot \mathbb{G} + \mathsf{L} \cdot \mathsf{G}) \operatorname{vol}\mathcal{R}, \tag{56}$$

$$\mathcal{W}^{in}_{\mathcal{R}}(v) := -(z \cdot w + T \cdot G + \mathbb{T} \cdot \mathbb{G} + \mathsf{T} \cdot \mathsf{G}) \operatorname{vol}\mathcal{R}. \tag{57}$$

Inoltre valga la seguente condizione di simmetria di G

$$\forall u \in \mathcal{U}, \forall v \in \mathcal{U}, \forall w \in \mathcal{U}, \quad \mathsf{G}uvw = \mathsf{G}uwu = \mathsf{G}vuw = \mathsf{G}vwu = \mathsf{G}wuv = \mathsf{G}wvu, \tag{58}$$

che induce la stessa proprietà su L.

Vogliamo descrivere delle distribuzioni di forze caratterizzanti classi di equipotenza. Come per la potenza di grado 1 e la potenza di grado 2, risulta

$$\begin{aligned} \mathsf{L} \cdot \mathsf{G} &= \mathsf{L}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3) \cdot \mathsf{G} \\ &= \mathsf{L}e_1 \cdot \mathsf{G}e_1 + \mathsf{L}e_2 \cdot \mathsf{G}e_2 + \mathsf{L}e_3 \cdot \mathsf{G}e_3. \end{aligned} \tag{59}$$

Ciascuno dei termini della somma può essere a sua volta trasformato ricorsivamente ottenendo infine, per via anche delle condizioni di simmetria,

$$\begin{aligned} (h_1h_2h_3)\, \mathsf{L} \cdot \mathsf{G} = 6\, &\mathsf{L}e_1e_2e_3 \cdot \mathsf{G}(h_1e_1)(h_2e_2)(h_3e_3) \\ &+ (h_2h_3)\mathsf{L}e_1e_1e_1 \cdot \mathsf{G}(h_1e_1)e_1e_1 \\ &+ (h_3h_1)\mathsf{L}e_2e_2e_2 \cdot \mathsf{G}(h_2e_2)e_2e_2 \\ &+ (h_1h_2)\mathsf{L}e_3e_3e_3 \cdot \mathsf{G}(h_3e_3)e_3e_3 \\ &+ 3\, h_1\big(\mathsf{L}e_2e_3e_2 \cdot \mathsf{G}(h_2e_2)(h_3e_3)e_2 + \mathsf{L}e_2e_3e_3 \cdot \mathsf{G}(h_2e_2)(h_3e_3)e_3\big) \\ &+ 3\, h_2\big(\mathsf{L}e_3e_1e_3 \cdot \mathsf{G}(h_3e_3)(h_1e_1)e_3 + \mathsf{L}e_3e_1e_1 \cdot \mathsf{G}(h_3e_3)(h_1e_1)e_1\big) \\ &+ 3\, h_3\big(\mathsf{L}e_1e_2e_1 \cdot \mathsf{G}(h_1e_1)(h_2e_2)e_1 + \mathsf{L}e_1e_2e_2 \cdot \mathsf{G}(h_1e_1)(h_2e_2)e_2\big). \end{aligned} \tag{60}$$

Indicando le velocità dei vertici con la regola implicita nelle seguenti definizioni

$$\begin{aligned} v_{+1+2+3} &:= v\big(x_\circ + \frac{h_1}{2}e_1 + \frac{h_2}{2}e_2 + \frac{h_3}{2}e_3\big), \\ v_{+1+2-3} &:= v\big(x_\circ + \frac{h_1}{2}e_1 + \frac{h_2}{2}e_2 - \frac{h_3}{2}e_3\big), \\ v_{+1-2+3} &:= v\big(x_\circ + \frac{h_1}{2}e_1 - \frac{h_2}{2}e_2 + \frac{h_3}{2}e_3\big), \end{aligned} \tag{61}$$

attraverso la (54) risulta

$$\begin{aligned}&\big((v_{+1+2+3}-v_{+1+2-3})-(v_{+1-2+3}-v_{+1-2-3})\big)\\-&\big((v_{-1+2+3}-v_{-1+2-3})-(v_{-1-2+3}-v_{-1-2-3})\big)=\mathsf{G}(h_1e_1)(h_2e_2)(h_3e_3).\end{aligned}\tag{62}$$

La espressione precedente è una differenza terza della velocità dei vertici. Corrispondentemente il termine

$$\mathsf{L}e_1e_2e_3 \tag{63}$$

ha il significato di *forza di vertice*. Poichè

$$\mathsf{G}(h_1e_1)e_1e_1,\quad \mathsf{G}(h_2e_2)e_2e_2,\quad \mathsf{G}(h_3e_3)e_3e_3 \tag{64}$$

sono derivate seconde normali della velocità sia sulle facce di normale e_1, e_2, e_3 che sulle facce opposte, i termini

$$\mathsf{L}e_1e_1e_1,\quad \mathsf{L}e_2e_2e_2,\quad \mathsf{L}e_3e_3e_3 \tag{65}$$

hanno il significato di distribuzioni uniformi di *triple forze di faccia*. Le espressioni

$$\mathsf{G}(h_2e_2)(h_3e_3)e_2,\quad \mathsf{G}(h_2e_2)(h_3e_3)e_3, \tag{66}$$

sono le derivate normali ad uno spigolo parallelo a e_1. Pertanto

$$\mathsf{L}e_2e_3e_2,\quad \mathsf{L}e_2e_3e_3 \tag{67}$$

sono delle *doppie forze di spigolo*.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Germain. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. Première partie: Théorie du second gradient. *Journal de Mécanique*, 12:235–274, 1973.

[2] A. Di Carlo. A non-standard format for continuum mechanics. in *Contemporary Research in the Mechanics and Mathematics of Materials*, R. C. Batra and M. F. Beatty, eds., CIMNE, Barcelona, pp. 263–268, 1996.

[3] F. Dell'Isola and P. Seppecher. Edge contact forces and quasi-balanced power. *Meccanica*, 32(1):33–52, 1997.

[4] A. Di Carlo, P. Podio-Guidugli, W.O. Williams. Shells with thickness distension. *Int. J. Solids & Structures*, 38:1201–1225, 2001.

[5] M. De Giovanni, A. Marzocchi, A. Musesti. Cauchy fluxes associated with tensor fields having divergence measure. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 147:197–223, 1999.