

# Tensione di grado 1 e flussi di Cauchy

Amabile Tatone

26 luglio 2000 – 25 giugno 2001 (12:50)

## Sommario

Si vede come il tensore di Cauchy, se non se ne postula a priori l'esistenza, possa essere ottenuto come momento di forze superficiali (o, meglio, si possa congetturare che ...). [Appunti preparati utilizzando alcune dispense per gli studenti]

## Indice

<b>1</b>	<b>Tensore momento</b>	<b>1</b>
1.1	Caso (1) . . . . .	1
1.2	Caso (2) . . . . .	2
1.3	Caso (3) . . . . .	2
1.4	Caso (4) (parallelepipedo) . . . . .	3
1.5	Proprietà del tensore momento . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Flussi di Cauchy</b>	<b>5</b>

## 1 Tensore momento

### 1.1 Caso (1)

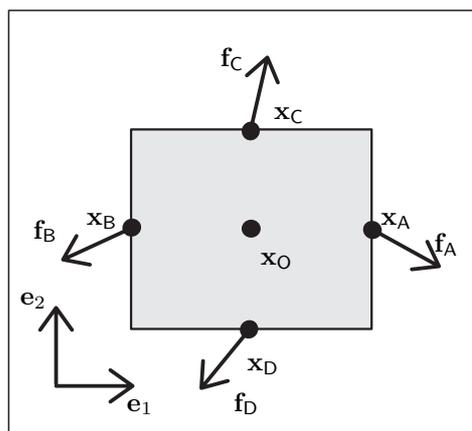


Figura 1: Corpo soggetto a forze applicate in alcuni punti

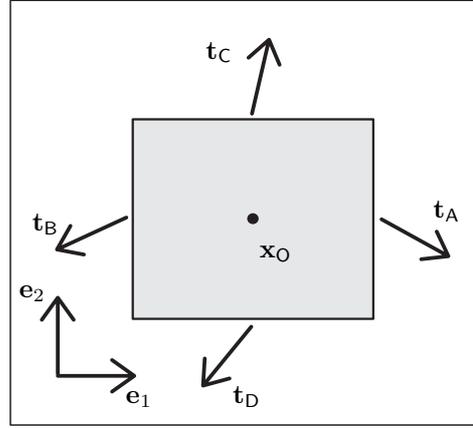


Figura 2: Corpo soggetto a una densità di forza applicata sul bordo

Si consideri il sistema di forze in fig. 1. La forza risultante è

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B + \mathbf{f}_C + \mathbf{f}_D. \quad (1)$$

Il momento risultante è

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{x_O} &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_B + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_C + (\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_D \\ &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \otimes (\mathbf{f}_A - \mathbf{f}_B) + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_D) \otimes (\mathbf{f}_C - \mathbf{f}_D) \end{aligned} \quad (2)$$

## 1.2 Caso (2)

Si consideri il sistema di forze in fig. 2 costituito da una densità di forza sul bordo, costante su ciascun lato. La forza risultante è

$$\mathbf{f} = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} = \int_{\partial\mathcal{D}} \check{\mathbf{t}}(\zeta) d\zeta = H_2(\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_B) + H_1(\mathbf{t}_C + \mathbf{t}_D). \quad (3)$$

Per il momento risultante si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{x_O} &= \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{t} \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} (\check{\mathbf{x}}(\zeta) - \mathbf{x}_O) \otimes \check{\mathbf{t}}(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} H_1 H_2 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{t}_A - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{t}_B + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{t}_C - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{t}_D) \\ &= H_1 H_2 \left( \mathbf{e}_1 \otimes \frac{1}{2} (\mathbf{t}_A - \mathbf{t}_B) + \mathbf{e}_2 \otimes \frac{1}{2} (\mathbf{t}_C - \mathbf{t}_D) \right), \end{aligned} \quad (4)$$

## 1.3 Caso (3)

Si consideri di nuovo il sistema di forze in fig. 2 costituito da una densità di forza sul bordo, costante su ciascun lato. Si noti che ponendo nella (4)

$$\mathbf{t}_1 := \frac{1}{2} (\mathbf{t}_A - \mathbf{t}_B), \quad \mathbf{t}_2 := \frac{1}{2} (\mathbf{t}_C - \mathbf{t}_D), \quad (5)$$

$$\mathbf{s}_1 := \frac{1}{2}(\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_B), \quad \mathbf{s}_2 := \frac{1}{2}(\mathbf{t}_C + \mathbf{t}_D), \quad (6)$$

la espressione del momento diventa

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_0} = H_1 H_2 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{t}_2), \quad (7)$$

da cui risulta la seguente proprietà

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{e}_1 &= H_1 H_2 \mathbf{t}_1, \\ \mathbf{M}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{e}_2 &= H_1 H_2 \mathbf{t}_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Corrispondentemente per la matrice del momento si ha

$$[\mathbf{M}_{\mathbf{x}_0}] = H_1 H_2 \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

avendo posto

$$\mathbf{t}_1 = t_{11} \mathbf{e}_1 + t_{21} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{t}_2 = t_{12} \mathbf{e}_1 + t_{22} \mathbf{e}_2. \quad (10)$$

Si osservi che il momento di un sistema di forze costituito da una densità di forza sul bordo descritta da  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$ , come in fig. 3, ha la stessa espressione (7), come si ricava dalla (4).

La forza risultante ha l'espressione<sup>1</sup>

$$\mathbf{f} = 2H_2 \mathbf{s}_1 + 2H_1 \mathbf{s}_2 = H_1 H_2 \left( \frac{2}{H_1} \mathbf{s}_1 + \frac{2}{H_2} \mathbf{s}_2 \right). \quad (11)$$

Pertanto una distribuzione uniforme a tratti costituita da  $\mathbf{s}_1$  uguale su ciascuno dei lati di lunghezza  $H_2$ ,  $\mathbf{s}_2$  uguale su ciascuno dei lati di lunghezza  $H_1$ ,  $\mathbf{t}_1$  opposta sui lati opposti di lunghezza  $H_2$ ,  $\mathbf{t}_2$  opposta sui lati opposti di lunghezza  $H_1$ , tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \frac{1}{H_1 H_2} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{t}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (12)$$

è equivalente al sistema di forze in fig. 2.

#### 1.4 Caso (4) (parallelepipedo)

Si consideri un parallelepipedo di spigoli  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  con forze opposte su facce opposte applicate al centro delle facce. La forza risultante è nulla e il momento risultante è

$$\mathbf{M} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{f}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{f}_2 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{f}_3. \quad (13)$$

Indicando con  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  i vettori normali unitari alle facce del parallelepipedo, la base duale di  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  risulta essere  $\{\beta_1 \mathbf{n}_1, \beta_2 \mathbf{n}_2, \beta_3 \mathbf{n}_3\}$  con

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\text{area}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\text{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \\ \beta_2 &= \frac{\text{area}(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1)}{\text{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \\ \beta_3 &= \frac{\text{area}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}{\text{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}. \end{aligned} \quad (14)$$

---

<sup>1</sup>Un'idea di Di Carlo

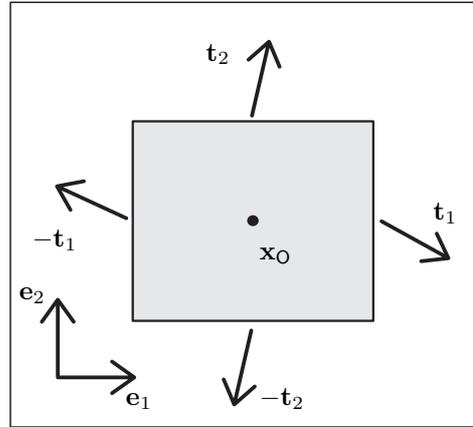


Figura 3: Corpo soggetto a una densità di forza applicata sul bordo, con valori opposti su lati opposti

Infatti, ponendo ad esempio

$$\mathbf{n}_3 = \nu_{13}\mathbf{a}_1 + \nu_{23}\mathbf{a}_2 + \nu_{33}\mathbf{a}_3$$

si ha

$$\mathbf{n}_3 \cdot (\beta_3 \mathbf{n}_3) = \nu_{33} \Rightarrow \nu_{33} = \beta_3.$$

Ne deriva che

$$\text{area}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \text{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}_3) = \beta_3 \text{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3).$$

Dalla espressione del momento si ha, per le proprietà delle basi duali,

$$\mathbf{M}(\beta_1 \mathbf{n}_1) = \mathbf{f}_1, \quad (15)$$

$$\mathbf{M}\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\beta_1} \mathbf{f}_1 = \frac{\text{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\text{area}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} \mathbf{f}_1. \quad (16)$$

Risulta pertanto

$$\frac{\mathbf{M}\mathbf{n}_1}{\text{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} = \frac{\mathbf{f}_1}{\text{area}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} \quad (17)$$

## 1.5 Proprietà del tensore momento

Questi risultati si possono generalizzare nel seguente:

*assegnata, per un corpo di forma  $\mathcal{R}$ , una classe di sistemi di forze equivalenti per atti di moto affini, con forza risultante  $\mathbf{f}$  e momento risultante  $\mathbf{M}$  rispetto ad un polo  $\mathbf{x}_0$ , esiste un rappresentante di tale classe costituito dalla forza  $\mathbf{f}$  applicata nel punto che occupa la posizione  $\mathbf{x}_0$  e da una densità di forza sul bordo  $\partial\mathcal{R}$ , avente forza risultante nulla, data da*

$$\mathbf{t} := \mathbf{L}\mathbf{n}, \quad (18)$$

essendo  $\mathbf{n}$  la normale esterna al bordo  $\partial\mathcal{R}$  e avendo posto

$$\mathbf{L} := \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{R})} \mathbf{M}. \quad (19)$$

Si ha infatti per la risultante

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{L}\mathbf{n} = \mathbf{L} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{n} = \mathbf{o}, \quad (20)$$

e per il momento risultante

$$\int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{L}\mathbf{n}) = \mathbf{L} \int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{L} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{I} = \mathbf{M}, \quad (21)$$

essendo, per il teorema della divergenza di campi scalari e per la definizione di gradiente di un campo vettoriale,

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{1}\mathbf{n} = \int_{\mathcal{R}} \nabla \mathbf{1} = \mathbf{o}, \quad (22)$$

$$\int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{n})\mathbf{e}_i = \int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{n} = \int_{\mathcal{R}} \nabla((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_i), \quad (23)$$

$$\nabla((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( ((\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - \mathbf{x}_0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i, \quad (24)$$

$$\Rightarrow \nabla((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \quad (25)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{n}) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{I}. \quad (26)$$

## 2 Flussi di Cauchy

*Appunti (molto) informali*

Se il flusso di Cauchy ha il significato seguente (solo per superfici chiuse)

$$\mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}$$

in atti di moto affini risulta

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{w} + \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

$$\mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{G}\mathbf{r},$$

con  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ . La espressione

$$\frac{\mathcal{Q}(\mathbf{v})}{\text{vol}(\mathcal{R})} = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{R})} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{R})} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r} \otimes \mathbf{t} \cdot \mathbf{G},$$

suggerisce l'idea che il tensore di Cauchy sia un tensore momento e che esistano i due limiti

$$\mathbf{b} := \lim_{\text{vol}(\mathcal{R}) \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{R})} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t},$$

$$\mathbf{L} := \lim_{\text{vol}(\mathcal{R}) \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{R})} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r} \otimes \mathbf{t}.$$

Si osservi che, ponendo

$$\mathbf{t} = \mathbf{L}\mathbf{n} + \check{\mathbf{t}},$$

risulta

$$\lim_{\text{vol}(\mathcal{R}) \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{R})} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r} \otimes \check{\mathbf{t}} = \mathbf{O}, \quad \lim_{\text{vol}(\mathcal{R}) \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{R})} \int_{\partial\mathcal{R}} \check{\mathbf{t}} = \mathbf{b},$$

$$\frac{1}{\text{vol}(\mathcal{R})} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r} \otimes \mathbf{L}\mathbf{n} = \mathbf{L}, \quad \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{L}\mathbf{n} = \mathbf{o},$$

che discendono esclusivamente dalle seguenti

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r} \otimes \mathbf{n} = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{I}, \quad \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{n} = \mathbf{o}.$$

La notazione usata deriva in parte da C.Truesdell, *RCM*, 2nd ed., 1991, pp. 188–189, dove è però definito il trasposto di  $\mathbf{L}$ .