Tensioni di grado 1,2,3 su un parallelepipedo

Amabile Tatone

11 novembre 2000 – 25 giugno 2001 (19:41)

Sommario

Si mostra come su un parallelepipedo con facce ortogonali, in corrispondenza di un'arbitraria 1-tensione si possa costruire, nella classe di equivalenza da questa definita, una distribuzione di forze uniforme su ciascuna faccia.

Si mostra che alla 2-tensione corrispondono, oltre all'ordinaria distribuzione di forze di faccia, anche forze di spigolo e doppie forze di faccia; analogamente, alla 3-tensione corrispondono - oltre alle precedenti - forze di vertice, doppie forze di spigolo e triple forze di faccia.

La costruzione è realizzata attraverso una successione di semplici trasformazioni algebriche, solo apparentemente immotivata, che conduce a delle espressioni solo apparentemente prive di significato.

Le motivazioni e i significati possono essere trovati estendendo tale costruzione al caso di un generico parallelepipedo o a classi di forme più ampie.

Indice

1 Tensore momento di grado 1

In corrispondenza del campo di velocità test

$$v(x) = v_{\circ} + G(x - x_{\circ}) \tag{1}$$

con

$$v_{\circ} \in \mathcal{V}, \quad G : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \tag{2}$$

la potenza è

$$\mathcal{W}_{\mathcal{R}}(v) := (b \cdot v_{\circ} + T \cdot G) \operatorname{vol} \mathcal{R} \tag{3}$$

con

$$b \in \mathcal{V}, \quad T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}. \tag{4}$$

Essendo

$$I = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3, \tag{5}$$

risulta

$$\begin{aligned} T \cdot G &= T(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3) \cdot G \\ &= (e_1 \otimes Te_1 + e_2 \otimes Te_2 + e_3 \otimes Te_3) \cdot G \\ &= Te_1 \cdot Ge_1 + Te_2 \cdot Ge_2 + Te_3 \cdot Ge_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Indicando le lunghezze degli spigoli con h_1, h_2, h_3, la espressione precedente diventa

$$\begin{aligned} T \cdot G &= Te_1 \cdot Ge_1 + Te_2 \cdot Ge_2 + Te_3 \cdot Ge_3 \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\Big((h_2h_3)Te_1 \cdot G(h_1e_1) + (h_3h_1)Te_2 \cdot G(h_2e_2) + (h_1h_2)Te_3 \cdot G(h_3e_3)\Big) \end{aligned} \tag{7}$$

Indicando le velocità al centro delle facce con la regola implicita nelle seguenti definizioni

$$\begin{aligned} v_{+1} &:= v(x_\circ + \frac{h_1}{2}e_1) \\ v_{-1} &:= v(x_\circ - \frac{h_1}{2}e_1), \end{aligned} \tag{8}$$

attraverso la (1) risulta

$$(v_{+1} - v_{-1}) = G(h_1e_1). \tag{9}$$

Pertanto

$$G(h_1e_1), \quad G(h_2e_2), \quad G(h_3e_3) \tag{10}$$

sono le differenze (prime) di velocità nelle direzioni e_1, e_2, e_3, i termini

$$Te_1, \quad Te_2, \quad Te_3 \tag{11}$$

sono interpretabili come forze superficiali sulle facce di normale e_1, e_2, e_3, essendo

$$(h_2h_3), \quad (h_3h_1), \quad (h_1h_2) \tag{12}$$

le aree di tali facce.

2 Tensore momento di grado 2

In corrispondenza del campo di velocità test

$$v(x) = v_\circ + G(x - x_\circ) + \frac{1}{2}\mathbb{G}(x - x_\circ)(x - x_\circ) \tag{13}$$

con

$$v_\circ \in \mathcal{V}, \quad G : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \quad \mathbb{G} : \mathcal{U} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \tag{14}$$

la potenza è

$$\mathcal{W}_{\mathcal{R}}(v) := (b \cdot v_\circ + T \cdot G + \mathbb{T} \cdot \mathbb{G}) \operatorname{vol} \mathcal{R} \tag{15}$$

dove

$$b \in \mathcal{V}, \quad T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \quad \mathbb{T} : \mathcal{U} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{V}). \tag{16}$$

Inoltre vale la seguente condizione di simmetria di $\mathbb{G}$

$$\mathbb{G}uv = \mathbb{G}vu, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \forall v \in \mathcal{U}, \tag{17}$$

che induce la stessa proprietà su $\mathbb{T}$

$$\mathbb{T}uv = \mathbb{T}vu, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \forall v \in \mathcal{U}. \tag{18}$$

Come per la potenza di grado 1 risulta

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \cdot \mathbb{G} &= \mathbb{T}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3) \cdot \mathbb{G} \\ &= (e_1 \otimes \mathbb{T}e_1 + e_2 \otimes \mathbb{T}e_2 + e_3 \otimes \mathbb{T}e_3) \cdot \mathbb{G} \\ &= \mathbb{T}e_1 \cdot \mathbb{G}e_1 + \mathbb{T}e_2 \cdot \mathbb{G}e_2 + \mathbb{T}e_3 \cdot \mathbb{G}e_3. \end{aligned} \tag{19}$$

Ciascuno dei termini della somma può essere a sua volta trasformato, utilizzando la (6), nel modo seguente

$$\begin{aligned} \mathbb{T}e_1 \cdot \mathbb{G}e_1 &= \mathbb{T}e_1e_1 \cdot \mathbb{G}e_1e_1 + \mathbb{T}e_1e_2 \cdot \mathbb{G}e_1e_2 + \mathbb{T}e_1e_3 \cdot \mathbb{G}e_1e_3 \\ \mathbb{T}e_2 \cdot \mathbb{G}e_2 &= \mathbb{T}e_2e_1 \cdot \mathbb{G}e_2e_1 + \mathbb{T}e_2e_2 \cdot \mathbb{G}e_2e_2 + \mathbb{T}e_2e_3 \cdot \mathbb{G}e_2e_3 \\ \mathbb{T}e_3 \cdot \mathbb{G}e_3 &= \mathbb{T}e_3e_1 \cdot \mathbb{G}e_3e_1 + \mathbb{T}e_3e_2 \cdot \mathbb{G}e_3e_2 + \mathbb{T}e_3e_3 \cdot \mathbb{G}e_3e_3 \end{aligned} \tag{20}$$

Moltiplicando per il volume $h_1h_2h_3$ si ottiene infine

$$\begin{aligned} (h_1h_2h_3)\ \mathbb{T} \cdot \mathbb{G} = (h_2h_3)&\mathbb{T}e_1e_1 \cdot \mathbb{G}(h_1e_1)e_1 \\ &+ (h_3h_1)\mathbb{T}e_2e_2 \cdot \mathbb{G}(h_2e_2)e_2 \\ &+ (h_1h_2)\mathbb{T}e_3e_3 \cdot \mathbb{G}(h_3e_3)e_3 \\ &+ 2\,h_1\mathbb{T}e_2e_3 \cdot \mathbb{G}(h_2e_2)(h_3e_3) \\ &+ 2\,h_2\mathbb{T}e_3e_1 \cdot \mathbb{G}(h_3e_3)(h_1e_1) \\ &+ 2\,h_3\mathbb{T}e_1e_2 \cdot \mathbb{G}(h_1e_1)(h_2e_2). \end{aligned} \tag{21}$$

Indicando le velocità al centro degli spigoli, sulle facce rispettivamente di normale e_1 e $-e_1$, con la regola implicita nelle seguenti definizioni

$$\begin{aligned} v_{+1+2} &:= v(x_\circ + \frac{h_1}{2}e_1 + \frac{h_2}{2}e_2) \\ v_{+1-2} &:= v(x_\circ + \frac{h_1}{2}e_1 - \frac{h_2}{2}e_2) \\ v_{-1+2} &:= v(x_\circ - \frac{h_1}{2}e_1 + \frac{h_2}{2}e_2) \\ v_{-1-2} &:= v(x_\circ - \frac{h_1}{2}e_1 - \frac{h_2}{2}e_2), \end{aligned} \tag{22}$$

attraverso la (13) risulta

$$(v_{+1+2} - v_{+1-2}) - (v_{-1+2} - v_{-1-2}) = \mathbb{G}(h_1 e_1)(h_2 e_2). \tag{23}$$

Le espressioni

$$\mathbb{G}(h_1 e_1)(h_2 e_2), \quad \mathbb{G}(h_2 e_2)(h_3 e_3), \quad \mathbb{G}(h_3 e_3)(h_1 e_1) \tag{24}$$

hanno dunque il significato di differenza (seconda) della velocità di spigoli opposti, mentre i termini

$$\mathbb{T}e_1 e_2, \quad \mathbb{T}e_2 e_3, \quad \mathbb{T}e_3 e_1. \tag{25}$$

hanno il significato di distribuzioni uniformi di forza sugli spigoli, dette brevemente *forze di spigolo*. Più in dettaglio, dalla (23) si ha

$$\mathbb{T}e_1 e_2 \cdot ((v_{+1+2} - v_{+1-2}) - (v_{-1+2} - v_{-1-2})) = \mathbb{T}e_1 e_2 \cdot \mathbb{G}(h_1 e_1)(h_2 e_2). \tag{26}$$

Poiché espandendo la prima espressione si ottiene

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}e_1 e_2 \cdot ((v_{+1+2} - v_{+1-2}) - (v_{-1+2} - v_{-1-2}) = \\ &\qquad \mathbb{T}e_1 e_2 \cdot v_{+1+2} - \mathbb{T}e_1 e_2 \cdot v_{+1-2} - \mathbb{T}e_1 e_2 \cdot v_{-1+2} + \mathbb{T}e_1 e_2 \cdot v_{-1-2}, \end{aligned} \tag{27}$$

il termine $2\, h_3 \mathbb{T}e_1 e_2 \cdot \mathbb{G}(h_1 e_1)(h_2 e_2)$ nella (21) corrisponde alla potenza di una distribuzione uniforme $2\,\mathbb{T}e_1 e_2$ su ciascuno degli spigoli $(+1+2)$ e $(-1-2)$, e di una distribuzione uniforme $-2\,\mathbb{T}e_1 e_2$ su ciascuno degli spigoli $(+1-2)$ e $(-1+2)$. Il fattore 2 trae origine dal fatto che ogni spigolo è bordo di due facce. Poichè

$$\mathbb{G}(\frac{h_1}{2} e_1) e_1, \quad \mathbb{G}(\frac{h_2}{2} e_2) e_2, \quad \mathbb{G}(\frac{h_3}{2} e_3) e_3 \tag{28}$$

hanno il significato di derivate normali della velocità sia sulle facce di normale e_1, e_2, e_3 che sulle facce opposte, i termini

$$\mathbb{T}e_1 e_1, \quad \mathbb{T}e_2 e_2, \quad \mathbb{T}e_3 e_3 \tag{29}$$

hanno il significato di distribuzioni uniformi di *doppie forze di faccia*.

3 Tensore momento di grado 3

In corrispondenza del campo di velocità test

$$v(x) = v_\circ + G(x - x_\circ) + \frac{1}{2}\mathbb{G}(x - x_\circ)(x - x_\circ) + \frac{1}{6}\mathsf{G}(x - x_\circ)(x - x_\circ)(x - x_\circ) \tag{30}$$

con

$$v_\circ \in \mathcal{V}, \quad G : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \quad \mathbb{G} : \mathcal{U} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \quad \mathsf{G} : \mathcal{U} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{V})), \tag{31}$$

la potenza è

$$\mathcal{W}_{\mathcal{R}}(v) := (b \cdot v_\circ + T \cdot G + \mathbb{T} \cdot \mathbb{G} + \mathsf{T} \cdot \mathsf{G}) \operatorname{vol} \mathcal{R} \tag{32}$$

dove

$$b \in \mathcal{V}, \quad T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \quad \mathbb{T} : \mathcal{U} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \quad \mathsf{T} : \mathcal{U} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{V})). \tag{33}$$

Inoltre vale la seguente condizione di simmetria di G

$$\forall u \in \mathcal{U}, \forall v \in \mathcal{U}, \forall w \in \mathcal{U}, \quad \mathsf{G}uvw = \mathsf{G}uwu = \mathsf{G}vuw = \mathsf{G}vwu = \mathsf{G}wuv = \mathsf{G}wvu, \tag{34}$$

che induce la stessa proprietà su T. Come per la potenza di grado 1 e la potenza di ordine 2, risulta

$$\begin{aligned} \mathsf{T} \cdot \mathsf{G} &= \mathsf{T}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3) \cdot \mathsf{G} \\ &= (e_1 \otimes \mathsf{T}e_1 + e_2 \otimes \mathsf{T}e_2 + e_3 \otimes \mathsf{T}e_3) \cdot \mathsf{G} \\ &= \mathsf{T}e_1 \cdot \mathsf{G}e_1 + \mathsf{T}e_2 \cdot \mathsf{G}e_2 + \mathsf{T}e_3 \cdot \mathsf{G}e_3. \end{aligned} \tag{35}$$

Ciascuno dei termini della somma può essere a sua volta trasformato, utilizzando le (20), nel modo seguente

$$\begin{aligned} \mathsf{T}e_1e_1 \cdot \mathsf{G}e_1e_1 &= \mathsf{T}e_1e_1e_1 \cdot \mathsf{G}e_1e_1e_1 + \mathsf{T}e_1e_1e_2 \cdot \mathsf{G}e_1e_1e_2 + \mathsf{T}e_1e_1e_3 \cdot \mathsf{G}e_1e_1e_3 \\ \mathsf{T}e_1e_2 \cdot \mathsf{G}e_1e_2 &= \mathsf{T}e_1e_2e_1 \cdot \mathsf{G}e_1e_2e_1 + \mathsf{T}e_1e_2e_2 \cdot \mathsf{G}e_1e_2e_2 + \mathsf{T}e_1e_2e_3 \cdot \mathsf{G}e_1e_2e_3 \\ \mathsf{T}e_1e_3 \cdot \mathsf{G}e_1e_3 &= \mathsf{T}e_1e_3e_1 \cdot \mathsf{G}e_1e_3e_1 + \mathsf{T}e_1e_3e_2 \cdot \mathsf{G}e_1e_3e_2 + \mathsf{T}e_1e_3e_3 \cdot \mathsf{G}e_1e_3e_3 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{T}e_2e_1 \cdot \mathsf{G}e_2e_1 &= \mathsf{T}e_2e_1e_1 \cdot \mathsf{G}e_2e_1e_1 + \mathsf{T}e_2e_1e_2 \cdot \mathsf{G}e_2e_1e_2 + \mathsf{T}e_2e_1e_3 \cdot \mathsf{G}e_2e_1e_3 \\ \mathsf{T}e_2e_2 \cdot \mathsf{G}e_2e_2 &= \mathsf{T}e_2e_2e_1 \cdot \mathsf{G}e_2e_2e_1 + \mathsf{T}e_2e_2e_2 \cdot \mathsf{G}e_2e_2e_2 + \mathsf{T}e_2e_2e_3 \cdot \mathsf{G}e_2e_2e_3 \\ \mathsf{T}e_2e_3 \cdot \mathsf{G}e_2e_3 &= \mathsf{T}e_2e_3e_1 \cdot \mathsf{G}e_2e_3e_1 + \mathsf{T}e_2e_3e_2 \cdot \mathsf{G}e_2e_3e_2 + \mathsf{T}e_2e_3e_3 \cdot \mathsf{G}e_2e_3e_3 \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{T}e_3e_1 \cdot \mathsf{G}e_3e_1 &= \mathsf{T}e_3e_1e_1 \cdot \mathsf{G}e_3e_1e_1 + \mathsf{T}e_3e_1e_2 \cdot \mathsf{G}e_3e_1e_2 + \mathsf{T}e_3e_1e_3 \cdot \mathsf{G}e_3e_1e_3 \\ \mathsf{T}e_3e_2 \cdot \mathsf{G}e_3e_2 &= \mathsf{T}e_3e_2e_1 \cdot \mathsf{G}e_3e_2e_1 + \mathsf{T}e_3e_2e_2 \cdot \mathsf{G}e_3e_2e_2 + \mathsf{T}e_3e_2e_3 \cdot \mathsf{G}e_3e_2e_3 \\ \mathsf{T}e_3e_3 \cdot \mathsf{G}e_3e_3 &= \mathsf{T}e_3e_3e_1 \cdot \mathsf{G}e_3e_3e_1 + \mathsf{T}e_3e_3e_2 \cdot \mathsf{G}e_3e_3e_2 + \mathsf{T}e_3e_3e_3 \cdot \mathsf{G}e_3e_3e_3 \end{aligned} \tag{38}$$

Moltiplicando per il volume $h_1h_2h_3$ si ottiene, per via delle condizioni di simmetria,

$$\begin{aligned} (h_1h_2h_3)\ \mathsf{T} \cdot \mathsf{G} = 6\,&\mathsf{T}e_1e_2e_3 \cdot \mathsf{G}(h_1e_1)(h_2e_2)(h_3e_3) \\ &+ (h_2h_3)\mathsf{T}e_1e_1e_1 \cdot \mathsf{G}(h_1e_1)e_1e_1 \\ &+ (h_3h_1)\mathsf{T}e_2e_2e_2 \cdot \mathsf{G}(h_2e_2)e_2e_2 \\ &+ (h_1h_2)\mathsf{T}e_3e_3e_3 \cdot \mathsf{G}(h_3e_3)e_3e_3 \\ &+ 3\,h_1\big(\mathsf{T}e_2e_3e_2 \cdot \mathsf{G}(h_2e_2)(h_3e_3)e_2 + \mathsf{T}e_2e_3e_3 \cdot \mathsf{G}(h_2e_2)(h_3e_3)e_3\big) \\ &+ 3\,h_2\big(\mathsf{T}e_3e_1e_3 \cdot \mathsf{G}(h_3e_3)(h_1e_1)e_3 + \mathsf{T}e_3e_1e_1 \cdot \mathsf{G}(h_3e_3)(h_1e_1)e_1\big) \\ &+ 3\,h_3\big(\mathsf{T}e_1e_2e_1 \cdot \mathsf{G}(h_1e_1)(h_2e_2)e_1 + \mathsf{T}e_1e_2e_2 \cdot \mathsf{G}(h_1e_1)(h_2e_2)e_2\big). \end{aligned} \tag{39}$$

Indicando le velocità dei vertici con la regola implicita nelle seguenti definizioni

$$\begin{aligned} v_{+1+2+3} &:= v(x_\circ + \frac{h_1}{2}e_1 + \frac{h_2}{2}e_2 + \frac{h_3}{2}e_3) \\ v_{+1+2-3} &:= v(x_\circ + \frac{h_1}{2}e_1 + \frac{h_2}{2}e_2 - \frac{h_3}{2}e_3) \\ v_{+1-2+3} &:= v(x_\circ + \frac{h_1}{2}e_1 - \frac{h_2}{2}e_2 + \frac{h_3}{2}e_3), \end{aligned} \tag{40}$$

attraverso la (30) risulta

$$\begin{aligned}&\big((v_{+1+2+3}-v_{+1+2-3})-(v_{+1-2+3}-v_{+1-2-3})\big)\\-&\big((v_{-1+2+3}-v_{-1+2-3})-(v_{-1-2+3}-v_{-1-2-3})\big)=\mathsf{G}(h_1e_1)(h_2e_2)(h_3e_3).\end{aligned}\tag{41}$$

La espressione precedente ha dunque il significato di differenza terza della velocità dei vertici, mentre il termine

$$\mathsf{T}e_1e_2e_3\tag{42}$$

ha il significato di *forza di vertice*. Più in dettaglio, dalla (41) si ha

$$\begin{aligned}&\mathsf{T}e_1e_2e_3\cdot\Big(\big((v_{+1+2+3}-v_{+1+2-3})-(v_{+1-2+3}-v_{+1-2-3})\big)\\-&\big((v_{-1+2+3}-v_{-1+2-3})-(v_{-1-2+3}-v_{-1-2-3})\big)\Big)=\mathsf{T}e_1e_2e_3\cdot\mathsf{G}(h_1e_1)(h_2e_2)(h_3e_3).\end{aligned}\tag{43}$$

Poiché espandendo la prima espressione si ottiene

$$\begin{aligned}\mathsf{T}e_1e_2e_3\cdot\Big(&\big((v_{+1+2+3}-v_{+1+2-3})-(v_{+1-2+3}-v_{+1-2-3})\big)\\&-\big((v_{-1+2+3}-v_{-1+2-3})-(v_{-1-2+3}-v_{-1-2-3})\big)\Big)=\\&\mathsf{T}e_1e_2e_3\cdot\Big(v_{+1+2+3}-v_{+1+2-3}-v_{+1-2+3}+v_{+1-2-3}\\&\qquad-v_{-1+2+3}+v_{-1+2-3}+v_{-1-2+3}-v_{-1-2-3}\Big)\end{aligned}\tag{44}$$

il termine $6\,\mathsf{T}e_1e_2e_3\cdot\mathsf{G}(h_1e_1)(h_2e_2)(h_3e_3)$ nella (39) corrisponde alla potenza di una forza $6\,\mathsf{T}e_1e_2e_3$ applicata ai vertici $(+1,+2,+3)$, $(+1,-2,-3)$, $(-1,+2,-3)$, $(-1,-2,+3)$ e ad una forza $-6\,\mathsf{T}e_1e_2e_3$ applicata ai vertici $(+1,+2,-3)$, $(+1,-2,+3)$, $(-1,+2,+3)$, $(-1,-2,-3)$. Il fattore 6 trae origine dal fatto che a ciascun vertice convergono tre spigoli, ciascuno dei quali è bordo di due facce. Poichè

$$\mathsf{G}(h_1e_1)e_1e_1,\quad\mathsf{G}(h_2e_2)e_2e_2,\quad\mathsf{G}(h_3e_3)e_3e_3\tag{45}$$

sono derivate seconde normali della velocità sia sulle facce di normale e_1,e_2,e_3 che sulle facce opposte, i termini

$$\mathsf{T}e_1e_1e_1,\quad\mathsf{T}e_2e_2e_2,\quad\mathsf{T}e_3e_3e_3\tag{46}$$

hanno il significato di distribuzioni uniformi di *triple forze di faccia*. Le espressioni

$$\mathsf{G}(h_2e_2)(h_3e_3)e_2,\quad\mathsf{G}(h_2e_2)(h_3e_3)e_3,\tag{47}$$

sono le derivate normali ad uno spigolo parallelo a e_1. Pertanto

$$\mathsf{T}e_2e_3e_2,\quad\mathsf{T}e_2e_3e_3\tag{48}$$

sono delle *doppie forze di spigolo*.