

Modelli di trave derivati da
un continuo di grado due

Amabile Tatone

18 maggio 2002

Indice

1	Trave di Timoshenko	2
1.1	Corpo a forma di trave	2
1.2	Modello diretto	5
1.3	Identificazione con il continuo di Cauchy	8
1.3.1	Gradiente della deformazione e gradiente della velocità	8
1.3.2	Potenza virtuale esterna	9
1.3.3	Potenza virtuale interna	10
1.4	Identificazione con il continuo di grado due	12
1.4.1	Modello di continuo di grado due	12
1.4.2	Moto	14
1.4.3	Potenza virtuale interna	19
1.5	Confronto tra le identificazioni e modelli asintotici	32
1.6	Equazioni di bilancio in forma scalare	34
1.7	Equazioni lineari di bilancio	37
1.7.1	Potenza virtuale esterna	37
1.7.2	Potenza virtuale interna	38
2	Trave con sezione affine	39
2.1	Modello diretto	39
2.1.1	Moto	39
2.1.2	Equazioni di bilancio	40
2.1.3	Potenza virtuale esterna	42
2.2	Identificazione con il continuo di grado due	43
2.2.1	Moto	43
2.2.2	Potenza virtuale interna	44
2.2.3	Equazioni di bilancio in forma scalare	46
3	Trave come continuo monodimensionale di grado due	48
3.1	Modello diretto	48

Capitolo 1

Trave di Timoshenko

1.1 Corpo a forma di trave

Una trave è un corpo la cui forma generica $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ è l'immagine di una funzione regolare e biunivoca

$$\mathcal{T} : [0, L] \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}, \quad (1.1.1)$$

essendo \mathcal{S} una porzione di superficie in \mathcal{E} orientata e piana, tale che comunque si scelga $\mathbf{y}_o \in \mathcal{S}$ per ogni $\mathbf{y} \in \mathcal{S}$ risulti

$$\mathcal{T}(\xi, \mathbf{y}) = \mathcal{T}(\xi, \mathbf{y}_o) + \mathcal{Q}(\xi)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_o) \quad (1.1.2)$$

essendo $\mathcal{Q}(\xi)$ una rotazione. La curva $\mathcal{T}(\xi, \mathbf{y}_o)$ si dice *asse*, l'immagine di \mathcal{T} per un fissato valore di ξ si dice *sezione*.

Indicando con $\bar{\mathcal{R}}$ una particolare forma, a cui corrisponde

$$\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}) = \bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}_o) + \bar{\mathcal{Q}}(\xi)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_o), \quad (1.1.3)$$

le deformazioni

$$\phi : \bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}) \mapsto \mathcal{T}(\xi, \mathbf{y}) \quad (1.1.4)$$

ammettono, attraverso la (1.1.2), la seguente rappresentazione

$$\phi(\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y})) = \phi(\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}_o)) + \mathcal{Q}(\xi)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_o) \quad (1.1.5)$$

in cui dalla (1.1.3)

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_o) &= \bar{\mathcal{Q}}(\xi)^{-1}(\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}) - \bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}_o)) \\ &= \bar{\mathcal{Q}}(\xi)^{\top}(\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}) - \bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}_o)) \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Ponendo

$$\mathbf{R}(\xi) := \mathcal{Q}(\xi)\bar{\mathcal{Q}}(\xi)^\top, \quad (1.1.7)$$

si ha dunque

$$\phi(\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y})) = \phi(\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}_o)) + \mathbf{R}(\xi)(\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}) - \bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}_o)). \quad (1.1.8)$$

dove anche $\mathbf{R}(\xi)$ è una rotazione. Si assuma che $\det \nabla \phi$ sia positivo ovunque.

Scelto $\mathbf{y}_o \in \mathcal{S}$, poiché $\bar{\mathcal{Q}}(\xi)$ è una rotazione, si può porre per ogni \mathbf{y}

$$\bar{\mathcal{Q}}(\xi)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_o) = \zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2(\xi) + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3(\xi), \quad (1.1.9)$$

con $\bar{\mathbf{a}}_2(\xi), \bar{\mathbf{a}}_3(\xi)$ vettori ortonormali, che assieme al vettore

$$\bar{\mathbf{a}}_1(\xi) := \bar{\mathbf{a}}_2(\xi) \times \bar{\mathbf{a}}_3(\xi)$$

costituiscono una base ortonormale $\{\bar{\mathbf{a}}_1(\xi), \bar{\mathbf{a}}_2(\xi), \bar{\mathbf{a}}_3(\xi)\}$. La (1.1.9) corrisponde alla scelta di un sistema di coordinate cartesiano su \mathcal{S} con origine in \mathbf{y}_o e tale che ad ogni \mathbf{y} corrisponda la coppia di coordinate (ζ_2, ζ_3) . Ponendo

$$\bar{\mathbf{x}}_o(\xi) := \bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}_o), \quad (1.1.10)$$

la (1.1.3) diventa

$$\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}) = \bar{\mathbf{x}}_o(\xi) + \zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2(\xi) + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3(\xi). \quad (1.1.11)$$

Risulta così definita la parametrizzazione $\bar{\mathbf{x}}$ di $\bar{\mathcal{R}}$ tale che

$$\bar{\mathbf{x}}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) = \bar{\mathbf{x}}_o(\xi) + \zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2(\xi) + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3(\xi), \quad (1.1.12)$$

avendo posto

$$\bar{\mathbf{x}}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) := \bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}). \quad (1.1.13)$$

Ponendo inoltre

$$\mathbf{x}_o(\xi) := \phi(\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y}_o)) \quad (1.1.14)$$

$$\mathbf{x}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) := \phi(\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y})) \quad (1.1.15)$$

la corrispondente parametrizzazione \mathbf{x} di \mathcal{R} , attraverso la (1.1.8) e la (1.1.11), risulta

$$\mathbf{x}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) = \mathbf{x}_o(\xi) + \mathbf{R}(\xi)(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2(\xi) + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3(\xi)). \quad (1.1.16)$$

o equivalentemente

$$\mathbf{x}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) = \mathbf{x}_o(\xi) + \mathbf{R}(\xi)(\bar{\mathbf{x}}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) - \bar{\mathbf{x}}_o(\xi)). \quad (1.1.17)$$

Definendo

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1(\xi) &:= \mathbf{R}(\xi)\bar{\mathbf{a}}_1(\xi), \\ \mathbf{a}_2(\xi) &:= \mathbf{R}(\xi)\bar{\mathbf{a}}_2(\xi), \\ \mathbf{a}_3(\xi) &:= \mathbf{R}(\xi)\bar{\mathbf{a}}_3(\xi),\end{aligned}$$

la (1.1.16) diventa

$$\mathbf{x}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) = \mathbf{x}_o(\xi) + \zeta_2\mathbf{a}_2(\xi) + \zeta_3\mathbf{a}_3(\xi). \quad (1.1.18)$$

Si noti che ζ_2 e ζ_3 descrivono attraverso $\bar{\mathbf{x}}$ e \mathbf{x} rispettivamente le posizioni $\bar{\mathcal{T}}(\xi, \mathbf{y})$ e $\mathcal{T}(\xi, \mathbf{y})$ di ciascuna sezione. Si assuma inoltre che $\bar{\mathcal{T}}$ sia tale che per $\bar{\mathbf{x}}'_o(\xi)$, vettore tangente alla curva (1.1.10), valga la relazione

$$\bar{\mathbf{x}}'_o(\xi) = \bar{\mathbf{a}}_1(\xi), \quad (1.1.19)$$

che rappresenta la condizione di ortogonalità delle sezioni rispetto all'asse nella configurazione iniziale. In generale questa proprietà non è conservata dalla deformazione ϕ . Indicando con λ , γ_2 , γ_3 le componenti nella base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ di \mathbf{x}' , vettore tangente alla curva (1.1.15), si può scrivere infatti:

$$\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{a}_1 + \gamma_2\mathbf{a}_2 + \gamma_3\mathbf{a}_3. \quad (1.1.20)$$

In un moto l'espressione delle velocità dei punti sulla sezione risulta, dalla (1.1.17)

$$\dot{\mathbf{x}}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) = \dot{\mathbf{x}}_o(\xi) + \dot{\mathbf{R}}(\xi)\mathbf{R}(\xi)^\top(\mathbf{x}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) - \mathbf{x}_o(\xi)). \quad (1.1.21)$$

Pertanto gli atti di moto sono descritti dai campi vettoriali

$$\mathbf{w}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) = \mathbf{w}_o(\xi) + \mathbf{W}_o(\xi)(\mathbf{x}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) - \mathbf{x}_o(\xi)), \quad (1.1.22)$$

in cui si è posto

$$\mathbf{w}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) = \dot{\mathbf{x}}(\xi, \zeta_2, \zeta_3), \quad (1.1.23)$$

$$\mathbf{w}_o(\xi) = \dot{\mathbf{x}}_o(\xi). \quad (1.1.24)$$

e con $\mathbf{W}_o(\xi)$ antisimmetrico. Nella base ortonormale $\{\mathbf{a}_1(\xi), \mathbf{a}_2(\xi), \mathbf{a}_3(\xi)\}$ il vettore $\mathbf{w}_o(\xi)$ ammette, in termini di componenti, la seguente rappresentazione:

$$\mathbf{w}_o(\xi) = w_{o1}(\xi)\mathbf{a}_1(\xi) + w_{o2}(\xi)\mathbf{a}_2(\xi) + w_{o3}(\xi)\mathbf{a}_3(\xi). \quad (1.1.25)$$

La matrice del tensore $\mathbf{W}_o(\xi)$ risulta, inoltre:

$$[\mathbf{W}_o(\xi)] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(\xi) & \omega_2(\xi) \\ \omega_3(\xi) & 0 & -\omega_1(\xi) \\ -\omega_2(\xi) & \omega_1(\xi) & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1.26)$$

1.2 Modello diretto

Il modello classico di trave alla Timoshenko, inteso come continuo tridimensionale, può essere assimilato ad un continuo monodimensionale le cui configurazioni sono descritte dalla coppia $(\mathbf{x}_o(\xi), \mathcal{Q}(\xi))$, in cui $\mathbf{x}_o(\xi)$ una curva immersa in uno spazio di dimensione tre e $\mathcal{Q}(\xi)$ è un campo di tensori ortogonali.

Per la formulazione delle equazioni di bilancio si possono direttamente considerare come descrittori degli atti di moto le funzioni $(\mathbf{w}_o(\xi), \mathbf{W}_o(\xi))$, come suggerito dalla (1.1.22), e quindi, come descrittori del gradiente degli atti di moto, le funzioni $(\mathbf{w}_o, \mathbf{w}'_o, \mathbf{W}_o, \mathbf{W}'_o)$.

Per la potenza esterna si può, dunque, assumere la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) &= \int_0^L (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}_o) d\xi \\ &+ \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{w}_o^- + \mathbf{M}^- \cdot \mathbf{W}_o^- + \mathbf{s}^+ \cdot \mathbf{w}_o^+ + \mathbf{M}^+ \cdot \mathbf{W}_o^+, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

mentre per la potenza interna si assume la espressione

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) = - \int_0^L (\mathbf{s}_o \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}_o + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_o) d\xi \quad (1.2.2)$$

Sommando la (1.2.1) e la (1.2.2) la potenza totale in un atto di moto virtuale risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) &= \int_0^L (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}_o) d\xi \\ &+ \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{w}_o^- + \mathbf{M}^- \cdot \mathbf{W}_o^- + \mathbf{s}^+ \cdot \mathbf{w}_o^+ + \mathbf{M}^+ \cdot \mathbf{W}_o^+ \\ &- \int_0^L (\mathbf{s}_o \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}_o + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_o) d\xi \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Attraverso la integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int_0^L (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_o) d\xi &= - \int_0^L (\mathbf{s}' \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{M}' \cdot \mathbf{W}_o) d\xi \\ &+ \mathbf{s}(L) \cdot \mathbf{w}_o^+ + \mathbf{M}(L) \cdot \mathbf{W}_o^+ - \mathbf{s}(0) \cdot \mathbf{w}_o^- - \mathbf{M}(0) \cdot \mathbf{W}_o^- \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

la (1.2.3) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) &= \int_0^L ((\mathbf{s}_o + \mathbf{s}' + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{w}_o + (\mathbf{M}' - \mathbf{Z} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{W}_o) d\xi \\ &+ (\mathbf{s}^- + \mathbf{s}(0)) \cdot \mathbf{w}_o^- + (\mathbf{M}^- + \mathbf{M}(0)) \cdot \mathbf{W}_o^- \\ &+ (\mathbf{s}^+ - \mathbf{s}(L)) \cdot \mathbf{w}_o^+ + (\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}(L)) \cdot \mathbf{W}_o^+ \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

La condizione che *la potenza virtuale sia nulla per ogni atto di moto* fornisce le equazioni differenziali di bilancio

$$\mathbf{s}_o + \mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o} \quad (1.2.6)$$

$$\mathbf{M}' - \mathbf{Z} + \mathbf{C} = \mathbf{o} \quad (1.2.7)$$

assieme alle equazioni di bilancio al bordo

$$-\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}^- \quad (1.2.8)$$

$$\mathbf{s}(L) = \mathbf{s}^+ \quad (1.2.9)$$

$$-\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}^- \quad (1.2.10)$$

$$\mathbf{M}(L) = \mathbf{M}^+ \quad (1.2.11)$$

Un atto di moto rigido può in generale avere la seguente rappresentazione

$$\mathbf{w}_o(\xi) = \mathbf{w}_o(0) + \mathbf{W}_o(0)(\mathbf{x}_o(\xi) - \mathbf{x}_o(0)), \quad (1.2.12)$$

$$\mathbf{W}_o(\xi) = \mathbf{W}_o(0), \quad (1.2.13)$$

da cui, derivando, si ottiene

$$\mathbf{w}'_o(\xi) = \mathbf{W}_o(0)\mathbf{x}'_o(\xi), \quad (1.2.14)$$

$$\mathbf{W}'_o(\xi) = \mathbf{O}. \quad (1.2.15)$$

Ponendo

$$\widehat{\mathbf{W}}_o := \mathbf{W}_o(0) \quad (1.2.16)$$

$$\widehat{\mathbf{w}}_o := \mathbf{w}_o(0) \quad (1.2.17)$$

la condizione che *per ogni atto di moto rigido la densità di potenza interna sia nulla* equivale alla seguente relazione:

$$\mathbf{s}_o \cdot \widehat{\mathbf{w}}_o + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}_o + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_o = 0 \quad \forall \widehat{\mathbf{w}}_o, \widehat{\mathbf{W}}_o \quad (1.2.18)$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{s}_o \cdot \widehat{\mathbf{w}}_o + \mathbf{s} \cdot \widehat{\mathbf{W}}_o \mathbf{x}'_o + \mathbf{Z} \cdot \widehat{\mathbf{W}}_o = 0 \quad (1.2.19)$$

$$\Rightarrow \mathbf{s}_o \cdot \widehat{\mathbf{w}}_o + (\mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s} + \mathbf{Z}) \cdot \widehat{\mathbf{W}}_o = 0 \quad (1.2.20)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{Z} = -\text{skw}(\mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s}) \\ \mathbf{s}_o = \mathbf{o} \end{cases} \quad (1.2.21)$$

Le equazioni di bilancio diventano dunque

$$\mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o} \quad (1.2.22)$$

$$\mathbf{M}' + \text{skw}(\mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s}) + \mathbf{C} = \mathbf{O}. \quad (1.2.23)$$

1.3 Identificazione con il continuo di Cauchy

La formulazione classica delle equazioni di bilancio, per il modello di trave alla Timoshenko, si basa sulla nozione di tensore degli sforzi di Cauchy. L'obiettivo dell'identificazione del modello diretto con il continuo di Cauchy consiste nell'interpretare le equazioni di bilancio a partire dalla corrispondenza degli atti di moto, descritti dalla (1.1.22), tra il modello diretto ed il continuo di Cauchy. In particolare, per mezzo dell'espressione della potenza esterna è possibile ricavare una interpretazione dei descrittori \mathbf{b} e \mathbf{C} delle forze esterne nel modello diretto in termini di densità di forza di volume \mathbf{b} e di densità di bordo \mathbf{t} . Tramite l'equivalenza della potenza interna invece, possibile ricavare una interpretazione dei descrittori degli sforzi \mathbf{s} e \mathbf{M} in termini del tensore di Cauchy.

1.3.1 Gradiente della deformazione e gradiente della velocità

Il gradiente della deformazione \mathbf{F} descritta dalla (1.1.4) si può valutare tramite le (1.1.20) e (1.1.18). Si ha dunque:

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{x}}' = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{R}(\lambda \bar{\mathbf{a}}_1 + \gamma_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \gamma_3 \bar{\mathbf{a}}_3), \quad (1.3.1)$$

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_2 = \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \mathbf{x} = \mathbf{a}_2 = \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \quad (1.3.2)$$

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_3 = \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \mathbf{x} = \mathbf{a}_3 = \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3. \quad (1.3.3)$$

La matrice di \mathbf{F} nella base $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$ è dunque

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{R}] \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3.4)$$

Risulta inoltre $\det \mathbf{F} = \lambda$. Per il gradiente della velocità, dalla (1.1.22) e utilizzando la (1.1.18) si ottiene:

$$\mathbf{G}\mathbf{x}' = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{w} = \mathbf{w}'_o + \mathbf{W}'_o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \mathbf{W}_o(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_o), \quad (1.3.5)$$

$$\mathbf{G}\mathbf{a}_2 = \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \mathbf{w} = \mathbf{W}_o \mathbf{a}_2, \quad (1.3.6)$$

$$\mathbf{G}\mathbf{a}_3 = \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \mathbf{w} = \mathbf{W}_o \mathbf{a}_3. \quad (1.3.7)$$

Si noti che il gradiente di velocità \mathbf{G} è una grandezza puntuale il cui valore dipende, oltre che dal valore dell'ascissa ξ sull'asse, anche dalla particolare scelta del punto \mathbf{x} sulla sezione. Il vettore \mathbf{x}'_0 è il vettore tangente alla curva (1.1.14).

1.3.2 Potenza virtuale esterna

Per la trave \mathcal{T} l'espressione della potenza virtuale esterna $\mathcal{W}^{(ext)}$, corrispondente ad una densità di forza di volume \mathbf{b} e ad una densità di forza di bordo \mathbf{t} è data dalla seguente espressione:

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} dA, \quad (1.3.8)$$

in cui

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{W}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (1.3.9)$$

In corrispondenza di una deformazione $\phi : \bar{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}$ si ha, essendo dalla $\det \mathbf{F} = \lambda$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \det \mathbf{F} dV \\ &= \int_0^L \int_S \mathbf{b} \lambda dA \cdot \mathbf{w}_0 d\xi + \int_0^L \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{b} \lambda dA \cdot \mathbf{W}_0 d\xi \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

In maniera del tutto analoga si può scrivere per \mathbf{t} :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} dA &= \int_0^L \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{t} \lambda d\ell \cdot \mathbf{w}_0 d\xi + \int_0^L \int_{\partial\mathcal{S}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{t} \lambda d\ell \cdot \mathbf{W}_0 d\xi \\ &\quad + \int_{S^-} \mathbf{t} dA \cdot \mathbf{w}_0^- + \int_{S^-} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{t} dA \cdot \mathbf{W}_0^- \\ &\quad + \int_{S^+} \mathbf{t} dA \cdot \mathbf{w}_0^+ + \int_{S^+} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{t} dA \cdot \mathbf{W}_0^+ \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

In questa si possono riconoscere i descrittori delle forze estere corrispondenti al modello diretto:

$$\mathbf{b} = \int_S \mathbf{b} \lambda dA + \int_{\partial S} \mathbf{t} \lambda d\ell \quad (1.3.12)$$

$$\mathbf{C} = \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{b} \lambda dA + \int_{\partial S} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{t} \lambda d\ell \quad (1.3.13)$$

$$\mathbf{s}^\pm = \int_{S^\pm} \mathbf{t} dA \quad (1.3.14)$$

$$\mathbf{M}^\pm = \int_{S^\pm} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{t} dA. \quad (1.3.15)$$

attraverso i quali si ritrova l'espressione della potenza esterna descritata dalla (1.2.1).

1.3.3 Potenza virtuale interna

Si consideri ora la espressione della potenza interna

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = - \int_{\mathcal{R}} \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{G} dV = - \int_{\bar{\mathcal{R}}} \lambda \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{G} dV = - \int_0^L \int_S \lambda \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{G} dA d\xi \quad (1.3.16)$$

dove \mathbf{T}_c è il tensore di Cauchy e con \mathbf{G} dato dalle (1.3.5)–(1.3.7). Essendo, in corrispondenza di ciascuna sezione,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{G} &= \mathbf{T}_c (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_3) \cdot \mathbf{G} \\ &= \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{G} \mathbf{a}_1 + \mathbf{T}_c \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{G} \mathbf{a}_2 + \mathbf{T}_c \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{G} \mathbf{a}_3, \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

utilizzando le (1.3.6) e (1.3.7) si ottiene

$$\mathbf{T}_c \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{G} \mathbf{a}_1 + \mathbf{T}_c \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{W}_o \mathbf{a}_2 + \mathbf{T}_c \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{W}_o \mathbf{a}_3. \quad (1.3.18)$$

Per il principio di obiettività della potenza interna il tensore \mathbf{T}_c deve essere tale che

$$\mathbf{T}_c \cdot \mathbf{W}_o = 0 \quad (1.3.19)$$

per qualsiasi \mathbf{W}_o antisimmetrico. Espandendo tale espressione come nella (1.3.17), risulta

$$\mathbf{T}_c \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{W}_o \mathbf{a}_2 + \mathbf{T}_c \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{W}_o \mathbf{a}_3 = -\mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{W}_o \mathbf{a}_1. \quad (1.3.20)$$

La (1.3.18) diventa pertanto

$$\mathbf{T}_c \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{W}_o) \mathbf{a}_1. \quad (1.3.21)$$

Poichè dalla (1.1.20) è

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}' - \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} \mathbf{a}_2 + \frac{\alpha_3}{\lambda} \mathbf{a}_3 \right) \quad (1.3.22)$$

risulta

$$\mathbf{G} \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\lambda} \mathbf{G} \mathbf{x}' - \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} \mathbf{G} \mathbf{a}_2 + \frac{\alpha_3}{\lambda} \mathbf{G} \mathbf{a}_3 \right) \quad (1.3.23)$$

$$\mathbf{W}_o \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\lambda} \mathbf{W}_o \mathbf{x}' - \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} \mathbf{W}_o \mathbf{a}_2 + \frac{\alpha_3}{\lambda} \mathbf{W}_o \mathbf{a}_3 \right) \quad (1.3.24)$$

e dunque, per le (1.3.6) e (1.3.7),

$$(\mathbf{G} - \mathbf{W}_o) \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{G} - \mathbf{W}_o) \mathbf{x}'. \quad (1.3.25)$$

Pertanto la (1.3.21) diventa, per la (1.3.5),

$$\lambda \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{W}_o) \mathbf{x}' \quad (1.3.26)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{w}'_o + \mathbf{W}'_o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \mathbf{W}_o(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_o) - \mathbf{W}_o \mathbf{x}') \\ &= \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{w}'_o - \mathbf{W}_o \mathbf{x}'_o + \mathbf{W}'_o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)) \\ &= \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{w}'_o - \mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{W}_o + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{W}'_o. \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Ponendo

$$\mathbf{s} := \int_S \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 dA \quad (1.3.28)$$

$$\mathbf{M} := \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 dA \quad (1.3.29)$$

la espressione della potenza interna (1.3.16) assume la forma

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = - \int_0^L (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o - \mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s} \cdot \mathbf{W}_o + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_o) d\xi. \quad (1.3.30)$$

che è del tutto equivalente all'espressione della potenza interna (1.2.2), corrispondente al modello diretto di trave, con le condizioni (1.2.21). Da questa si deducono, dunque, le seguenti relazioni:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s} \quad (1.3.31)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M} \quad (1.3.32)$$

1.4 Identificazione con il continuo di grado due

L'identificazione tra il modello diretto di trave ed il modello di grado due consiste nello stabilire una corrispondenza tra gli atti di moto di ciascun modello e nell'assumere che la potenza interna e la potenza esterna abbiano lo stesso valore per atti di moto corrispondenti. L'obiettivo è ancora una volta quello di interpretare i descrittori \mathbf{s} e \mathbf{M} in termini di descrittori della tensione qui rappresentati dal tensore degli sforzi di grado uno \mathbf{T}_o e dal tensore degli sforzi di grado due \mathbb{T}_o . Dal punto di vista geometrico il modello di continuo di grado due viene confrontato con una generica sezione che rappresenta la porzione più elementare per il modello di trave.

1.4.1 Modello di continuo di grado due

Si consideri per un fissato valore dell'ascissa ξ un solido di forma cilindrica immagine di una funzione regolare e biunivoca

$$\mathcal{C}_{\xi,h} : [0, h] \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}_{\xi,h}, \quad (1.4.1)$$

generato dalla traslazione della sezione \mathcal{S} lungo la tangente $\mathbf{x}'_o(\xi)$ all'asse $\mathcal{T}(\xi, \mathbf{y}_o)$ della trave in corrispondenza del fissato valore ξ e tale che il baricentro della sezione coincida con il baricentro del cilindro stesso (Figura 1.1).

Poichè la deformazione ϕ , descritta dalla (1.1.4), non conserva, in generale, la condizione di ortogonalità delle sezioni rispetto all'asse, il cilindro $\mathcal{C}_{\xi,h}$ è, per costruzione, non retto. È conveniente, quindi, introdurre un sistema di coordinate cartesiane su $\mathcal{C}_{\xi,h}$, attraverso la scelta della base $\{\mathbf{x}'_o(\xi), \mathbf{a}_2(\xi), \mathbf{a}_3(\xi)\}$ e con origine in \mathbf{y}_o , tale che ad ogni \mathbf{y} corrisponde la terna di coordinate $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. Comunque si scelga $\mathbf{y}_o \in \mathcal{R}_{\xi,h}$ risulta

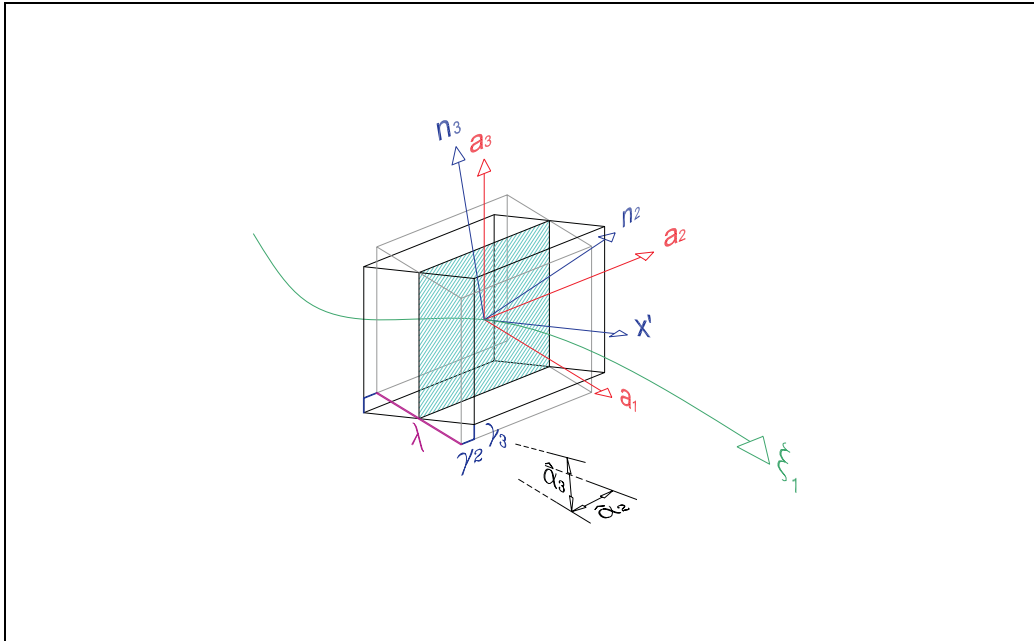
$$\mathcal{C}_{\xi,h}(0, \mathbf{y}_o) = \mathbf{x}_o(\xi) \quad (1.4.2)$$

e per ogni $\mathbf{y} \in \mathcal{R}_{\xi,h}$ risulta

$$\mathcal{C}_{\xi,h}(\zeta, \mathbf{y}) = \mathcal{C}_{\xi,h}(0, \mathbf{y}_o) + \zeta \mathbf{x}'_o(\xi) + \mathcal{Q}(\xi)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_o). \quad (1.4.3)$$

Ricordando che, tramite la (1.1.9)

$$\mathcal{Q}(\xi)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_o) = \zeta_2 \mathbf{a}_2(\xi) + \zeta_3 \mathbf{a}_3(\xi) \quad (1.4.4)$$

Figura 1.1: Rappresentazione del cilindro $\mathcal{C}_{\xi, h}$

si può introdurre la seguente parametrizzazione su $\mathcal{C}_{\xi, h}$:

$$\mathbf{x}_{\xi}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) := \mathbf{x}_o(\xi) + \zeta_1 \mathbf{x}'_o(\xi) + \zeta_2 \mathbf{a}_2(\xi) + \zeta_3 \mathbf{a}_3(\xi). \quad (1.4.5)$$

Si noti che, per i punti che giacciono sulla sezione \mathcal{S} ossia per $\zeta_1 = 0$, si trova la seguente relazione:

$$\mathbf{x}_{\xi}(0, \zeta_2, \zeta_3) = \mathbf{x}(\xi, \zeta_2, \zeta_3). \quad (1.4.6)$$

Siano, inoltre, $\mathbf{n}_2(\xi)$ e $\mathbf{n}_3(\xi)$ una coppia di vettori normali alla superficie laterale del cilindro tali da soddisfare le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}'_o &= 0 \\ \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{x}'_o &= 0 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{a}_3 &= 0 \\ \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{a}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Indicando con λ , γ_2 , γ_3 le componenti del vettore tangente \mathbf{x}'_o nella base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$:

$$\mathbf{x}'_o = \lambda \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2 + \gamma_3 \mathbf{a}_3 \quad (1.4.7)$$

risulta:

$$\mathbf{n}_2 = -\frac{\gamma_2}{(\lambda^2 + \gamma_2^2)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{a}_1 + \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \gamma_2^2)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{a}_2 \quad (1.4.8)$$

$$\mathbf{n}_3 = -\frac{\gamma_3}{(\lambda^3 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{a}_1 + \frac{\lambda}{(\lambda^3 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{a}_3. \quad (1.4.9)$$

Siano inoltre $\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3$ rispettivamente gli angoli compresi tra il vettore \mathbf{a}_1 e le proiezioni di \mathbf{x}'_o nel piano individuato dalla coppia $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ e nel piano individuato dalla coppia $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$. Si ha allora:

$$\alpha_2 := \cos \hat{\alpha}_2 = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot (\lambda \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2)}{\|\mathbf{a}_1\| \|\lambda \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2\|} = \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \gamma_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\alpha_3 := \cos \hat{\alpha}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot (\lambda \mathbf{a}_1 + \gamma_3 \mathbf{a}_3)}{\|\mathbf{a}_1\| \|\lambda \mathbf{a}_1 + \gamma_3 \mathbf{a}_3\|} = \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sostituendo tali relazioni, le (1.4.8) e (1.4.9) diventano:

$$\mathbf{n}_2 = -\frac{\alpha_2 \gamma_2}{\lambda}\mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 \quad (1.4.10)$$

$$\mathbf{n}_3 = -\frac{\alpha_3 \gamma_3}{\lambda}\mathbf{a}_1 + \alpha_3 \mathbf{a}_3. \quad (1.4.11)$$

1.4.2 Moto

Gli atti di moto del cilindro tangente $\mathcal{C}_{\xi,h}(\zeta_1, \mathbf{y})$, corrispondenti agli atti di moto della sezione \mathcal{S} individuata dall'ascissa curvilinea ξ , risultano *atti di moto di grado due* in cui le velocità dei punti possono essere descritte, omettendo per chiarezza l'indice ξ , dalla seguente funzione:

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{G}_o(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \frac{1}{2}\mathbb{G}_o(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o). \quad (1.4.12)$$

Utilizzando la parametrizzazione di $\mathcal{C}_{\xi,h}(\zeta_1, \mathbf{y})$ si può scrivere direttamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\xi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) &= \mathbf{w}_o(\xi) + \mathbf{G}_o(\xi)(\mathbf{x}_\xi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - \mathbf{x}_o(\xi)) + \\ &+ \frac{1}{2}\mathbb{G}_o(\xi)(\mathbf{x}_\xi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - \mathbf{x}_o(\xi))(\mathbf{x}_\xi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - \mathbf{x}_o(\xi)). \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

in cui si è posto

$$\mathbf{w}_\xi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \dot{\mathbf{x}}_\xi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \quad (1.4.14)$$

$$\mathbf{w}_o(\xi) = \dot{\mathbf{x}}_o(\xi). \quad (1.4.15)$$

La corrispondenza tra il campo di velocità del cilindro ed il campo di velocità della sezione è stabilita attraverso la relazione tra i tensori \mathbf{G}_o e \mathbb{G}_o e i gradienti primo e secondo delle velocità \mathbf{w} della sezione, valutati in corrispondenza del punto $\mathbf{x}_o(\xi)$ sull'asse della trave, data dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{G}_o \mathbf{x}'_o = \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{w}'_o, \quad (1.4.16)$$

$$\mathbf{G}_o \mathbf{a}_2 = \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \zeta_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{W}_o \mathbf{a}_2, \quad (1.4.17)$$

$$\mathbf{G}_o \mathbf{a}_3 = \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \zeta_3} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{W}_o \mathbf{a}_3, \quad (1.4.18)$$

e per il tensore $\mathbb{G}_o(\xi)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{x}'_o := \mathbf{o}, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{a}_2 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \xi \partial \zeta_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{W}'_o(\xi) \mathbf{a}_2, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{a}_3 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \xi \partial \zeta_3} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{W}'_o(\xi) \mathbf{a}_3, \end{array} \right. \quad (1.4.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{G}_o \mathbf{a}_2 \mathbf{x}'_o = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_2 \partial \xi} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{W}'_o(\xi) \mathbf{a}_2, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{o}, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_3} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{o}, \end{array} \right. \quad (1.4.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{G}_o \mathbf{a}_3 \mathbf{x}'_o = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_3 \partial \xi} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{W}'_o(\xi) \mathbf{a}_3, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_3 \partial \zeta_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{o}, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_3 \partial \zeta_3} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{o}, \end{array} \right. \quad (1.4.21)$$

Il termine $\mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{x}'_o$ si assume che sia nullo poichè nel modello di Timoshenko la densità di potenza interna della trave dipende solo ed esclusivamente dalle

derivate prime dei descrittori degli atti di moto $\mathbf{w}_o(\xi)$ e $\mathbf{W}_o(\xi)$. Si può osservare che:

$$\nabla \mathbf{w}_\xi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \nabla \mathbf{w}(\xi, \zeta_2, \zeta_3), \quad (1.4.22)$$

$$\nabla^2 \mathbf{w}_\xi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \neq \nabla^2 \mathbf{w}(\xi, \zeta_2, \zeta_3). \quad (1.4.23)$$

In particolare la relazione (1.4.23) è determinata dal fatto che le funzioni $\mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{x}'_o$ e $\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \xi^2} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o}$ sono del tutto indipendenti tra di loro.

Tenendo, dunque, conto delle (1.1.25) e (1.1.26) la matrice del tensore $\mathbf{G}_o(\xi)$ si può scrivere, secondo la base $\{\mathbf{x}'_o, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, nel seguente modo:

$$[\mathbf{G}_o(\xi)] = \begin{pmatrix} w'_{o1}(\xi) & -\omega_3(\xi) & \omega_2(\xi) \\ w'_{o2}(\xi) & 0 & -\omega_1(\xi) \\ w'_{o3}(\xi) & \omega_1(\xi) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.24)$$

la matrice del tensore $\mathbb{G}_o(\xi)$ è invece:

$$[\mathbb{G}_o(\xi)] = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3(\xi) & \omega'_2(\xi) \\ 0 & 0 & -\omega'_1(\xi) \\ 0 & \omega'_1(\xi) & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\omega'_3(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega'_1(\xi) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \omega'_2(\xi) & 0 & 0 \\ -\omega'_1(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (1.4.25)$$

Seguendo la disposizione degli elementi g_{ij} all'interno della matrice di \mathbf{G}_o , questi termini di velocità possono essere rappresentati come in Figura 1.2. Analogamente i termini g_{ij1} del tensore $\mathbb{G}_o \mathbf{a}_1$ sono rappresentati in Figura 1.3

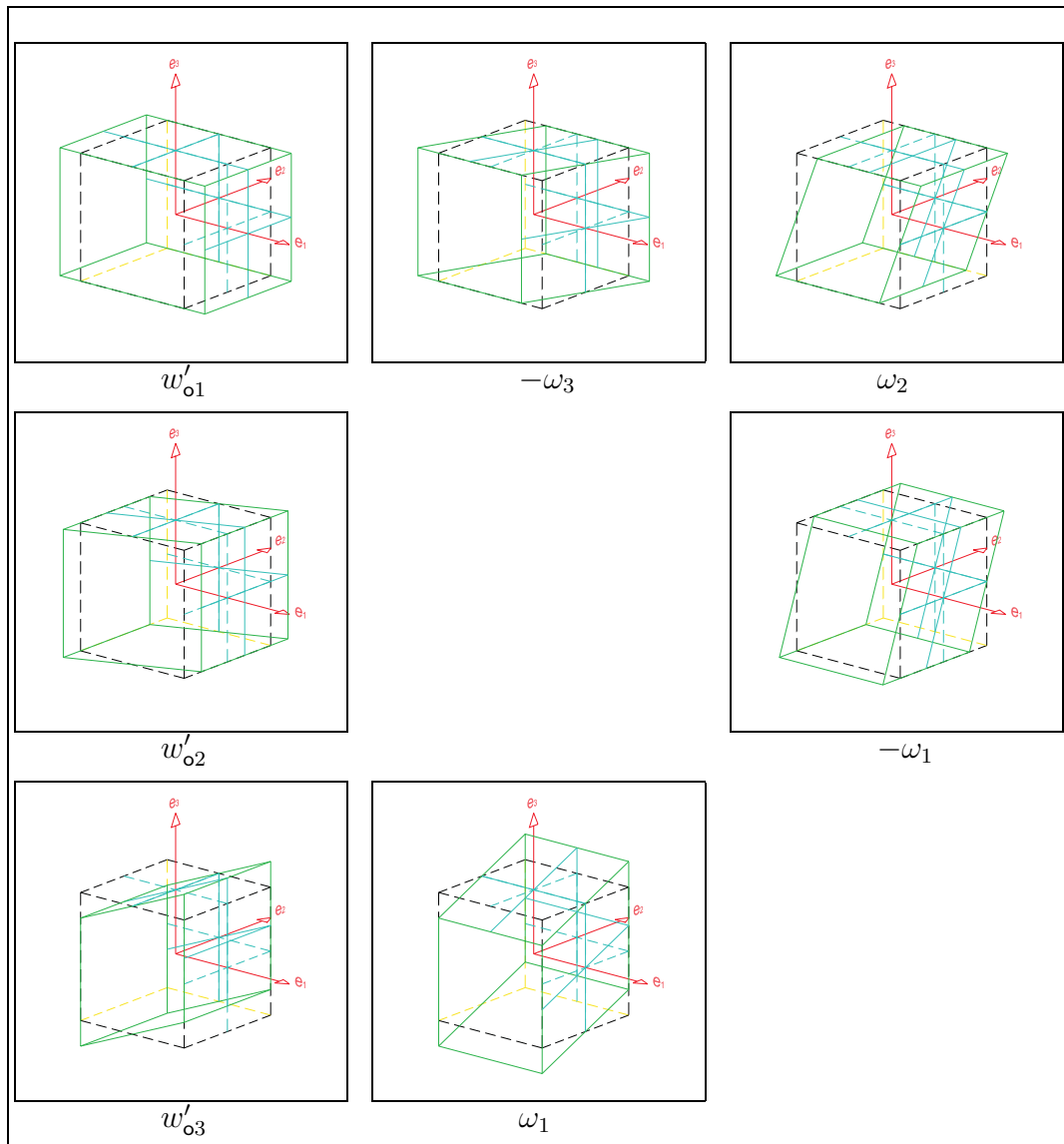


Figura 1.2: Rappresentazione del campo di velocità corrispondente a \mathbf{G}_o

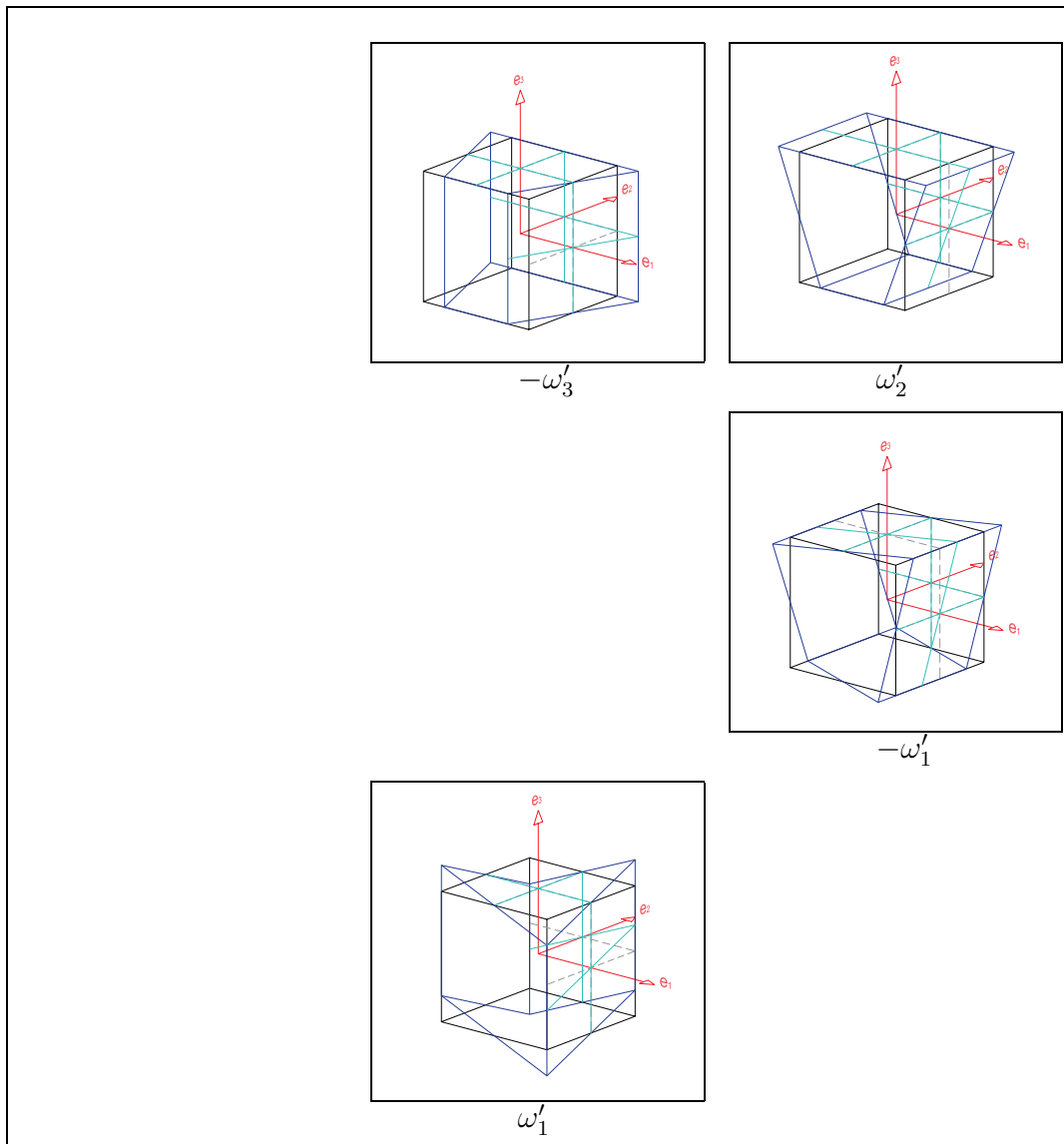


Figura 1.3: Rappresentazione del campo di velocità corrispondente a $\mathbb{G}_o \mathbf{a}_1$

1.4.3 Potenza virtuale interna

La potenza virtuale interna $\mathcal{W}_h^{(int)}$ del cilindro tangente $\mathcal{C}_{\xi,h}(\zeta_1, \mathbf{y})$, in quanto corpo di grado due, ha la seguente espressione :

$$\mathcal{W}_h^{(int)} := -(\mathbf{T}_o \cdot \mathbf{G}_o + \mathbb{T}_o \cdot \mathbb{G}_o) \text{vol}(\mathcal{R}_{\xi,h}) \quad (1.4.26)$$

che può essere analizzata più in dettaglio se si introducono le applicazioni lineari $\tilde{\mathbf{P}}$ e $\tilde{\mathbf{V}}$ che descrivono, rispettivamente, le proiezioni sulla sezione \mathcal{S} e lungo il vettore tangente \mathbf{x}'_o :

$$\tilde{\mathbf{P}} : \mathcal{V} \rightarrow \text{span}\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \quad (1.4.27)$$

$$\tilde{\mathbf{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \text{span}\{\mathbf{x}'_o\} \quad (1.4.28)$$

in particolare

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{a}_3 \quad (1.4.29)$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{x}'_o. \quad (1.4.30)$$

La decomposizione della potenza interna secondo gli endomorfismi $\tilde{\mathbf{P}}$ e $\tilde{\mathbf{V}}$ equivale, come si vedrà meglio in seguito, alla scelta della base $\{\mathbf{x}'_o, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ per la rappresentazione matriciale dei tensori \mathbf{G}_o e \mathbb{G}_o , e della base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ per i tensori \mathbf{T}_o e \mathbb{T}_o .

Potenza virtuale interna di grado uno

Il termine di grado uno della potenza interna (1.4.26) si può scrivere, tramite le proiezioni $\tilde{\mathbf{P}}$ e $\tilde{\mathbf{V}}$, nel seguente modo :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_o \cdot \mathbf{G}_o &= \mathbf{T}_o(\tilde{\mathbf{P}}^\top + \tilde{\mathbf{V}}^\top) \cdot \mathbf{G}_o(\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{V}}) \\ &= \mathbf{T}_o \tilde{\mathbf{P}}^\top \cdot \mathbf{G}_o \tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{T}_o \tilde{\mathbf{V}}^\top \cdot \mathbf{G}_o \tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{T}_o \tilde{\mathbf{V}}^\top \cdot \mathbf{G}_o \tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{T}_o \tilde{\mathbf{P}}^\top \cdot \mathbf{G}_o \tilde{\mathbf{P}} \end{aligned} \quad (1.4.31)$$

dove

$$\mathbf{T}_o \tilde{\mathbf{P}}^\top \cdot \mathbf{G}_o \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{T}_o \tilde{\mathbf{P}}^\top \tilde{\mathbf{V}}^\top \cdot \mathbf{G}_o = 0$$

$$\mathbf{T}_o \tilde{\mathbf{V}}^\top \cdot \mathbf{G}_o \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}_o \tilde{\mathbf{V}}^\top \tilde{\mathbf{P}}^\top \cdot \mathbf{G}_o = 0$$

e dove:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_o \tilde{\mathbf{V}}^\top \cdot \mathbf{G}_o \tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{T}_o \left(\frac{1}{\lambda} \mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{a}_1 \right) \cdot \mathbf{G}_o \left(\frac{1}{\lambda} \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{x}'_o \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot \frac{1}{\lambda} \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{G}_o \mathbf{x}'_o \\
&= \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{G}_o \mathbf{x}'_o \right) \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}'_o \\
&= \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{G}_o \mathbf{x}'_o \left(\mathbf{a}_1 \cdot \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}'_o \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{G}_o \mathbf{x}'_o
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_o \tilde{\mathbf{P}}^\top \cdot \mathbf{G}_o \tilde{\mathbf{P}} &= \mathbf{T}_o \left(\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{n}_3 \right) \cdot \mathbf{G}_o \left(\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{a}_3 \right) \\
&= \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{G}_o \left(\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{a}_3 \right) + \dots \\
&= \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{G}_o \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{G}_o \mathbf{a}_3
\end{aligned}$$

In definitiva si ottiene:

$$\mathbf{T}_o \cdot \mathbf{G}_o = \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{G}_o \mathbf{x}'_o + \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{G}_o \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{G}_o \mathbf{a}_3. \quad (1.4.32)$$

Dalla (1.4.24) si deduce che il tensore degli sforzi \mathbf{T}_o ammette nella base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ la seguente rappresentazione matriciale:

$$[\mathbf{T}_o] = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & 0 & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.33)$$

Graficamente, seguendo la disposizione degli elementi f_{ij} all'interno della matrice di \mathbf{T}_o , queste forze di superficie possono essere rappresentate come in Figura 1.4.

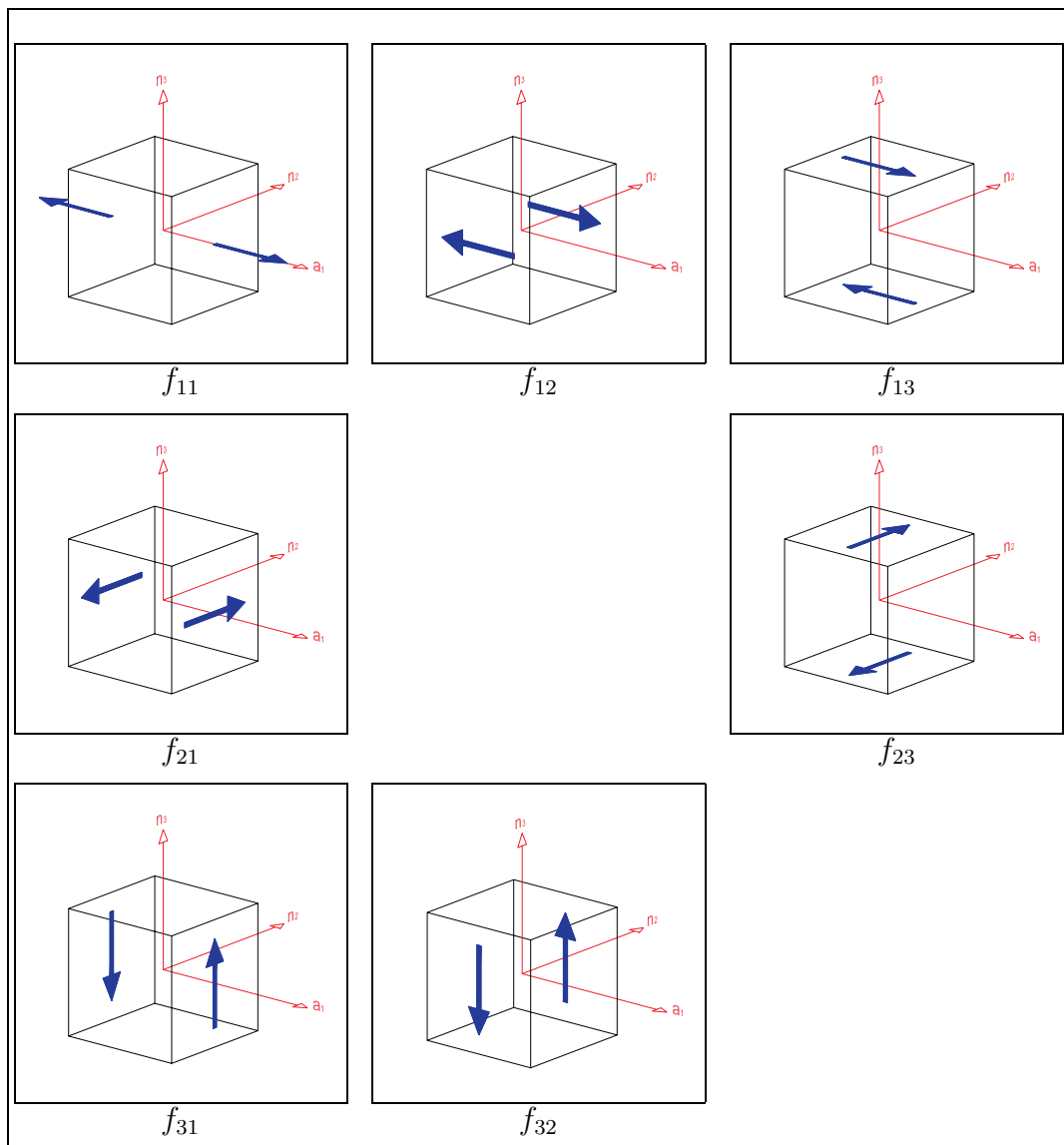


Figura 1.4: Rappresentazione delle forze f_{ij}

Per il principio di obiettività della potenza interna il tensore \mathbf{T}_o deve essere tale che:

$$\mathbf{T}_o \cdot \mathbf{W}_o = 0 \quad (1.4.34)$$

per qualsiasi \mathbf{W}_o antisimmetrico. Espandendo tale espressione come nella (1.4.32) risulta:

$$\mathbf{T}_o \cdot \mathbf{W}_o = \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{W}_o \mathbf{x}'_o + \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{W}_o \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{W}_o \mathbf{a}_3 = 0 \quad (1.4.35)$$

da cui si ottiene

$$\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{W}_o \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{W}_o \mathbf{a}_3 = -\frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{W}_o \mathbf{x}'_o \quad (1.4.36)$$

La (1.4.32) diventa pertanto:

$$\mathbf{T}_o \cdot \mathbf{G}_o = \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G}_o - \mathbf{W}_o) \mathbf{x}'_o. \quad (1.4.37)$$

Il contributo di grado uno alla potenza interna del cilindro $\mathcal{C}_{\xi,h}(\mathbf{y})$ è dato, dunque, dalla seguente espressione:

$$\mathcal{W}_h^{(int)} := - \int_{\mathcal{R}_{\xi,h}} \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G}_o - \mathbf{W}_o) \mathbf{x}'_o dV \quad (1.4.38)$$

L'identificazione della potenza interna $\mathcal{W}_h^{(int)}$ del cilindro con la potenza interna della sezione \mathcal{S} , rappresentata dalla densità lineare di potenza interna $\varpi^{(int)}$ della trave \mathcal{T} , equivale ad imporre la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \varpi^{(int)} &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathcal{W}_h^{(int)} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{R}_{\xi,h}} \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G}_o - \mathbf{W}_o) \mathbf{x}'_o dV \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{S}} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G}_o - \mathbf{W}_o) \mathbf{x}'_o d\zeta_1 \right) dA \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G}_o - \mathbf{W}_o) \mathbf{x}'_o dA \\ &= - \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G}_o - \mathbf{W}_o) \mathbf{x}'_o dA \end{aligned} \quad (1.4.39)$$

ponendo

$$\mathcal{A} := \int_{\mathcal{S}} dA \quad (1.4.40)$$

la (1.4.38) diventa

$$\varpi^{(int)} = -\mathcal{A} \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G}_o - \mathbf{W}_o) \mathbf{x}'_o \quad (1.4.41)$$

In termini di componenti si può scrivere per la (1.4.37)

$$\mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 = f_{11} \mathbf{a}_1 + f_{21} \mathbf{a}_2 + f_{31} \mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{G}_o \mathbf{x}'_o = \mathbf{w}'_o = w'_{o1} \mathbf{a}_1 + w'_{o2} \mathbf{a}_2 + w'_{o3} \mathbf{a}_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_o \mathbf{x}'_o &= \mathbf{W}_o (\lambda \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2 + \gamma_3 \mathbf{a}_3) \\ &= \lambda (\omega_3 \mathbf{a}_2 - \omega_2 \mathbf{a}_3) + \gamma_2 (-\omega_3 \mathbf{a}_1 + \omega_1 \mathbf{a}_3) + \gamma_3 (\omega_2 \mathbf{a}_1 - \omega_1 \mathbf{a}_2) \\ &= (-\gamma_2 \omega_3 + \gamma_3 \omega_2) \mathbf{a}_1 + (\lambda \omega_3 - \gamma_3 \omega_1) \mathbf{a}_2 + (-\lambda \omega_2 + \gamma_2 \omega_1) \mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

per cui risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_o \cdot \mathbf{G}_o &= \frac{1}{\lambda} f_{11} (w'_{o1} + \gamma_2 \omega_3 - \gamma_3 \omega_2) + \frac{1}{\lambda} f_{21} (w'_{o2} - \lambda \omega_3 + \gamma_3 \omega_1) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} f_{31} (w'_{o3} + \lambda \omega_2 - \gamma_2 \omega_1). \end{aligned} \quad (1.4.42)$$

In riferimento alla (1.4.41) si possono, dunque, definire le seguenti *caratteristiche di sollecitazione*:

$$\mathcal{N} := \mathcal{A} f_{11} \quad (1.4.43)$$

$$\mathcal{Q}_2 := \mathcal{A} f_{21} \quad (1.4.44)$$

$$\mathcal{Q}_3 := \mathcal{A} f_{31} \quad (1.4.45)$$

chiamate, rispettivamente, *sforzo normale*, *sforzo di taglio* lungo la direzione \mathbf{a}_2 e *sforzo di taglio* lungo la direzione \mathbf{a}_3 .

Il termine di grado uno della densità lineare di potenza $\varpi^{(int)}$ della trave si può, quindi, esprimere tramite la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \varpi^{(int)} &= -\frac{1}{\lambda} (\mathcal{N} (w'_{o1} + \gamma_2 \omega_3 - \gamma_3 \omega_2) + \mathcal{Q}_2 (w'_{o2} - \lambda \omega_3 + \gamma_3 \omega_1) \\ &\quad + \mathcal{Q}_3 (w'_{o3} + \lambda \omega_2 - \gamma_2 \omega_1)). \end{aligned} \quad (1.4.46)$$

Ponendo:

$$\mathbf{s} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{R}_{\xi, h}} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 dV \quad (1.4.47)$$

si ottiene

$$\mathbf{s} = \mathcal{A} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 = \mathcal{N} \mathbf{a}_1 + \mathcal{Q}_2 \mathbf{a}_2 + \mathcal{Q}_3 \mathbf{a}_3. \quad (1.4.48)$$

Per cui la (1.4.41) si può altresì esprimere nella seguente forma

$$\varpi^{(int)} = -\frac{1}{\lambda} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{w}'_o - \mathbf{W} \mathbf{x}'_o) = -(\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o - \mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s} \cdot \mathbf{W}) \quad (1.4.49)$$

che corrisponde alla (1.4.46) scritta in termini tensoriali.

Potenza virtuale interna di grado due

Il termine di grado due della potenza interna (1.4.26) è dato, in maniera del tutto analoga alla (1.4.31), dalla seguente espressione:

$$\mathbb{T}_o \cdot \mathbb{G}_o = \mathbb{T}_o \tilde{\mathbf{V}}^\top \cdot \mathbb{G}_o \tilde{\mathbf{V}} + \mathbb{T}_o \tilde{\mathbf{P}}^\top \cdot \mathbb{G}_o \tilde{\mathbf{P}} \quad (1.4.50)$$

dove, tramite le (1.4.29) e (1.4.30)

$$\mathbb{T}_o \tilde{\mathbf{V}}^\top \cdot \mathbb{G}_o \tilde{\mathbf{V}} = \frac{1}{\lambda} \mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot \mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \quad (1.4.51)$$

$$\mathbb{T}_o \tilde{\mathbf{P}}^\top \cdot \mathbb{G}_o \tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{\alpha_2} \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{G}_o \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \cdot \mathbb{G}_o \mathbf{a}_3. \quad (1.4.52)$$

Proiettando ulteriormente le (1.4.51) e (1.4.52) lungo la sezione \mathcal{S} e lungo il vettore tangente \mathbf{x}'_o e considerando solamente i termini non nulli del tensore \mathbb{G}_o si ottiene:

$$\mathbb{T}_o \tilde{\mathbf{V}}^\top \cdot \mathbb{G}_o \tilde{\mathbf{V}} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\alpha_2} \mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 \cdot \mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{a}_3 \right) \quad (1.4.53)$$

$$\mathbb{T}_o \tilde{\mathbf{P}}^\top \cdot \mathbb{G}_o \tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{\lambda \alpha_2} \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbb{G}_o \mathbf{a}_2 \mathbf{x}'_o + \frac{1}{\lambda \alpha_3} \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbb{G}_o \mathbf{a}_3 \mathbf{x}'_o. \quad (1.4.54)$$

Si osservi che per la simmetria di \mathbb{G}_o , in virtù dell'uguaglianza delle derivate parziali miste del campo vettoriale $\mathbf{w}_\xi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ risulta

$$\mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{a}_2 = \mathbb{G}_o \mathbf{a}_2 \mathbf{x}'_o, \quad (1.4.55)$$

$$\mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{a}_3 = \mathbb{G}_o \mathbf{a}_3 \mathbf{x}'_o. \quad (1.4.56)$$

La (1.4.50) diventa pertanto

$$\mathbb{T}_o \cdot \mathbb{G}_o = \frac{1}{\lambda \alpha_2} (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1) \cdot \mathbb{G}_o \mathbf{a}_2 \mathbf{x}'_o + \frac{1}{\lambda \alpha_3} (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1) \cdot \mathbb{G}_o \mathbf{a}_3 \mathbf{x}'_o \quad (1.4.57)$$

dalla quale si ottiene, esprimendo \mathbb{G}_o in termini del campo di velocità \mathbf{w} della sezione

$$\mathbb{T}_o \cdot \mathbb{G}_o = \frac{1}{\lambda\alpha_2} (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{W}'_o \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\lambda\alpha_3} (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{W}'_o \mathbf{a}_3 \quad (1.4.58)$$

o equivalentemente

$$\mathbb{T}_o \cdot \mathbb{G}_o = \left(\frac{1}{\lambda\alpha_2} \mathbf{a}_2 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1) + \frac{1}{\lambda\alpha_3} \mathbf{a}_3 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1) \right) \cdot \mathbf{W}'_o. \quad (1.4.59)$$

Da quest'ultima relazione si può dedurre che, nel modello di trave alla Timoshenko, ai fini della potenza virtuale spesa in atti di moto di grado due non tutti i termini del tensore degli sforzi \mathbb{T}_o forniscono un contributo non nullo, risulta infatti:

$$\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 = 0$$

$$\mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2 = 0$$

$$\mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3 = 0$$

$$\mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_2 = 0$$

$$\mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3 = 0$$

Il contributo di grado due alla potenza interna del cilindro $\mathcal{C}_{\xi,h}(\zeta_1, \mathbf{y})$ risulta dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_h^{(int)} := & - \int_{\mathcal{R}_{\xi,h}} \left(\frac{1}{\lambda\alpha_2} (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{W}'_o \mathbf{a}_2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda\alpha_3} (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{W}'_o \mathbf{a}_3 \right) dV. \end{aligned} \quad (1.4.60)$$

La densità lineare di potenza interna $\varpi^{(int)}$ della trave \mathcal{T} corrispondente al termine di grado due della potenza interna del cilindro tangente è fornita dalla seguente relazione

$$\varpi^{(int)} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathcal{W}_h^{(int)}$$

che diventa

$$\varpi^{(int)} = -\mathcal{A} \left(\frac{1}{\lambda\alpha_2} (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{W}'_o \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\lambda\alpha_3} (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{W}'_o \mathbf{a}_3 \right). \quad (1.4.61)$$

Per la (1.4.59) si può scrivere in termini di componenti

$$\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 = f_{121} \mathbf{a}_1 + f_{221} \mathbf{a}_2 + f_{321} \mathbf{a}_3$$

$$\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 = f_{131} \mathbf{a}_1 + f_{231} \mathbf{a}_2 + f_{331} \mathbf{a}_3$$

$$\mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1 = f_{112} \mathbf{a}_1 + f_{212} \mathbf{a}_2 + f_{312} \mathbf{a}_3$$

$$\mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1 = f_{113} \mathbf{a}_1 + f_{213} \mathbf{a}_2 + f_{313} \mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{W}'_o \mathbf{a}_2 = -\omega'_3 \mathbf{a}_1 + \omega'_1 \mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{W}'_o \mathbf{a}_3 = \omega'_2 \mathbf{a}_1 - \omega'_1 \mathbf{a}_2$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_o \cdot \mathbb{G}_o = & \frac{1}{\lambda \alpha_2} \left(- (f_{121} + f_{112}) \omega'_3 + (f_{321} + f_{312}) \omega'_1 \right) + \\ & + \frac{1}{\lambda \alpha_3} \left((f_{131} + f_{113}) \omega'_2 - (f_{231} + f_{213}) \omega'_1 \right). \end{aligned} \quad (1.4.62)$$

Nella base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ la matrice del tensore \mathbb{T}_o risulta

$$[\mathbb{T}_o] = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f_{121} & f_{131} \\ 0 & 0 & f_{231} \\ 0 & f_{321} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_{112} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ f_{312} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_{113} & 0 & 0 \\ f_{213} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (1.4.63)$$

In riferimento alla (1.4.61) si possono definire, in questo caso, le seguenti

caratteristiche di sollecitazione:

$$\mathcal{M}_1 := \mathcal{A} \left(\frac{1}{\alpha_2} (f_{321} + f_{312}) - \frac{1}{\alpha_3} (f_{231} + f_{213}) \right) \quad (1.4.64)$$

$$\mathcal{M}_2 := \mathcal{A} \frac{1}{\alpha_3} (f_{131} + f_{113}) \quad (1.4.65)$$

$$\mathcal{M}_3 := -\mathcal{A} \frac{1}{\alpha_2} (f_{121} + f_{112}). \quad (1.4.66)$$

dette, rispettivamente, *momento torcente* intorno alla direzione \mathbf{a}_3 , *momento flettente* intorno alla direzione \mathbf{a}_2 e *momento flettente* intorno alla direzione \mathbf{a}_3 che sostituiti nella (1.4.61) permettono di esprimere il termine di grado due della densità lineare di potenza $\varpi^{(int)}$ della trave in una forma più significativa:

$$\varpi^{(int)} = -\frac{1}{\lambda} (\mathcal{M}_1 \omega'_1 + \mathcal{M}_2 \omega'_2 + \mathcal{M}_3 \omega'_3). \quad (1.4.67)$$

Seguendo la disposizione degli elementi f_{ijk} all'interno delle matrici di $\mathbb{T}_o \mathbf{e}_1$, $\mathbb{T}_o \mathbf{e}_2$ e $\mathbb{T}_o \mathbf{e}_3$, queste distribuzioni di forze possono essere rappresentate, rispettivamente, come in Figura 1.5, 1.6 e 1.7.

Ponendo inoltre:

$$\mathbf{M} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{R}_{\xi, h}} \left(\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{a}_2 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1) + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{a}_3 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1) \right) dV \quad (1.4.68)$$

si ottiene

$$\mathbf{M} = \mathcal{A} \left(\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{a}_2 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1) + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{a}_3 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1) \right) \quad (1.4.69)$$

che ammette in forma matriciale la seguente rappresentazione:

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha_2} (f_{121} + f_{112}) & \frac{1}{\alpha_3} (f_{131} + f_{113}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} (f_{231} + f_{213}) \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} (f_{321} + f_{312}) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.70)$$

Si pu osservare, inoltre, che:

$$[2 \text{ skw } \mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{M}_3 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 & 0 & -\mathcal{M}_1 \\ -\mathcal{M}_2 & \mathcal{M}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.71)$$

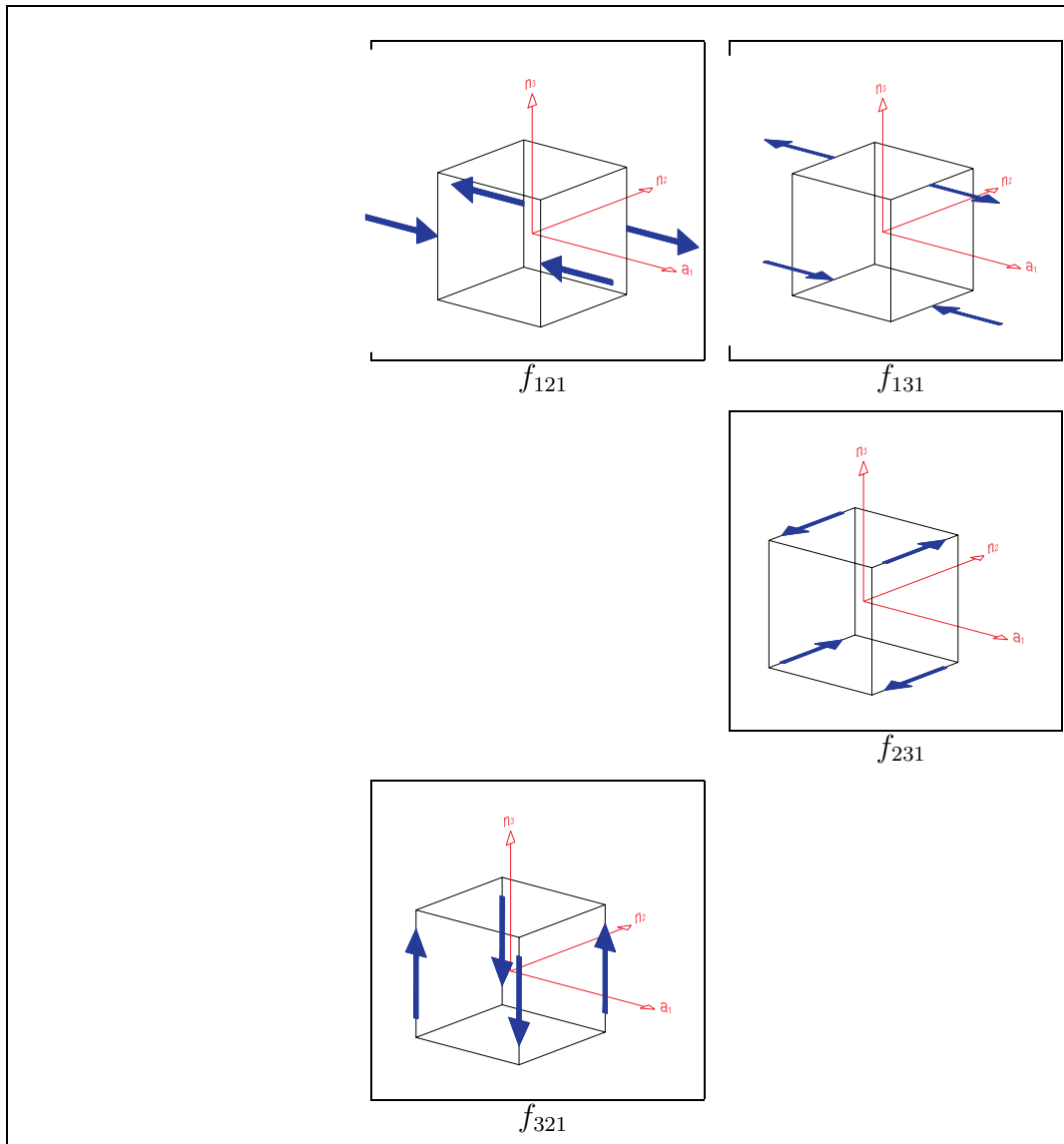


Figura 1.5: Rappresentazione delle forze f_{ij1}

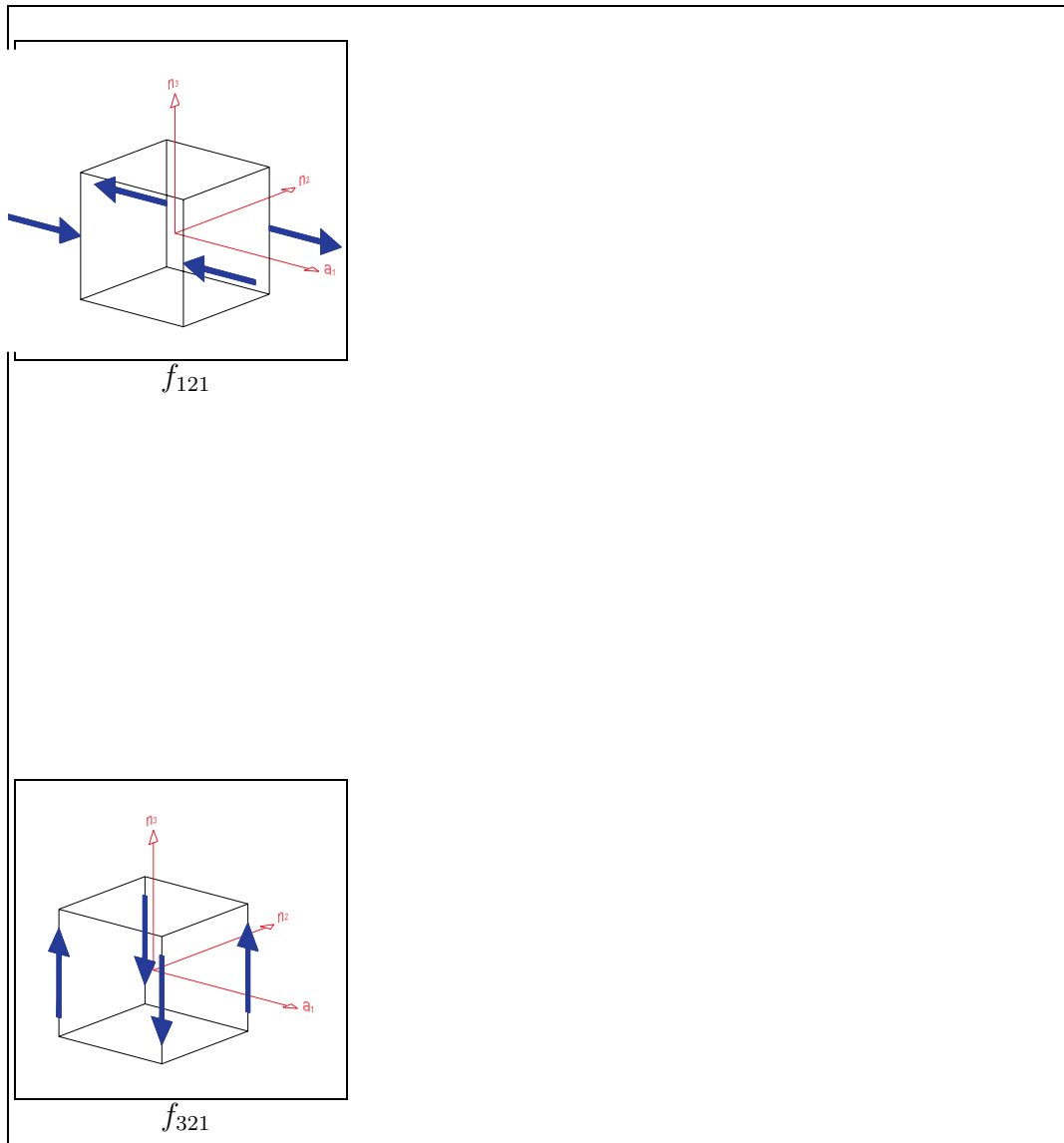


Figura 1.6: Rappresentazione delle forze f_{ij2}

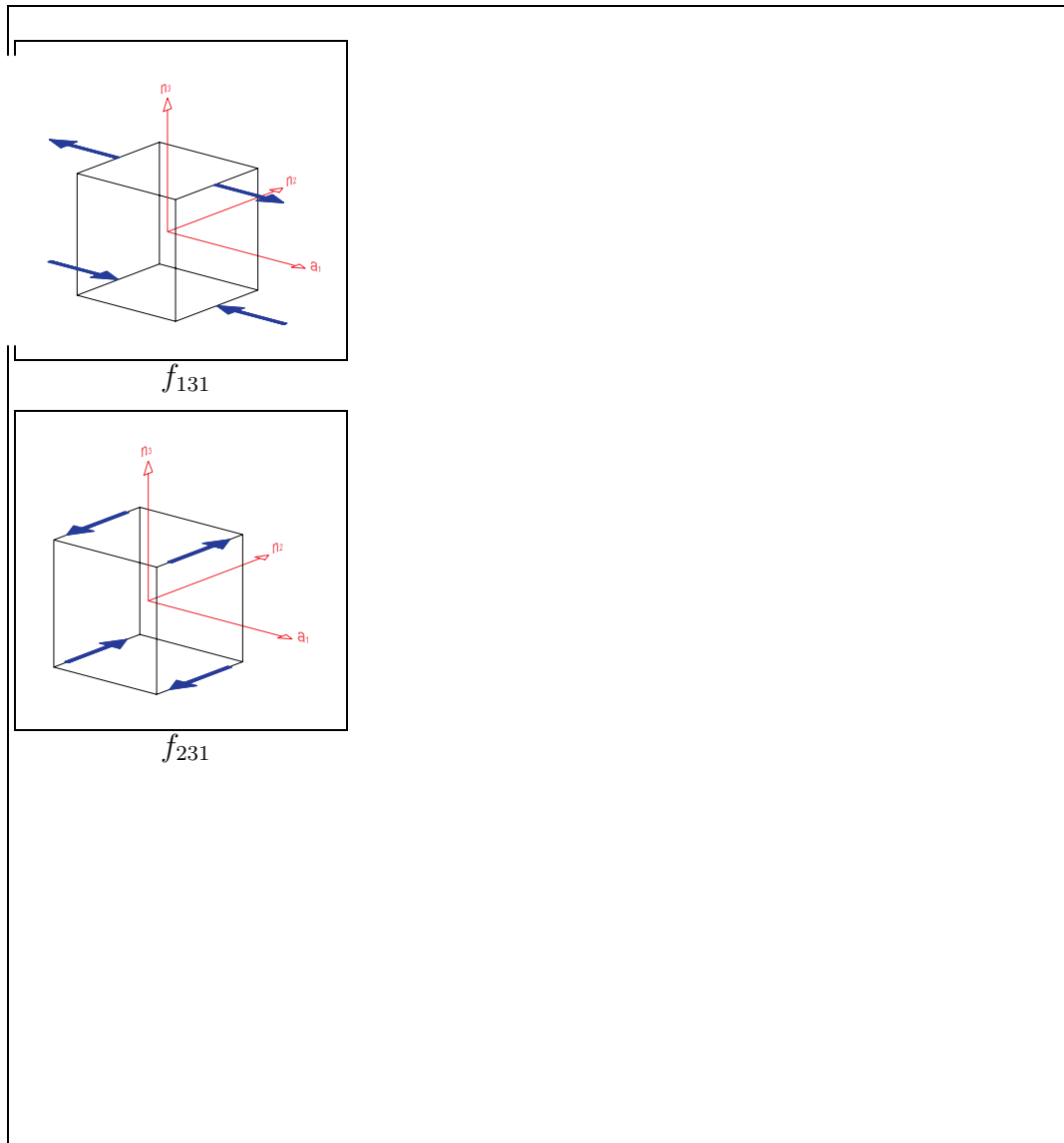


Figura 1.7: Rappresentazione delle forze f_{ij3}

Per cui è possibile esprimere la (1.4.61) nella seguente forma

$$\varpi^{(int)} = -\frac{1}{\lambda} \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_{\circ} \quad (1.4.72)$$

che corrisponde alla (1.4.67) scritta in forma tensoriale.

L'espressione della potenza virtuale interna $\mathcal{W}^{(int)}$ si può esprimere in funzione della densità lineare di potenza $\varpi^{(int)}$ nel seguente modo:

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) := \int_0^L \varpi^{(int)}(\mathbf{w}) \lambda \, d\xi \quad (1.4.73)$$

Considerando, dalla (1.4.49), il termine di grado uno e, dalla (1.4.72), il termine di grado due, si ritrova per la potenza interna della trave l'espressione (1.2.2) con le condizioni (1.2.21):

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = - \int_0^L (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_{\circ} - \mathbf{x}'_{\circ} \otimes \mathbf{s} \cdot \mathbf{W}_{\circ} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_{\circ}) \, d\xi. \quad (1.4.74)$$

1.5 Confronto tra le identificazioni e modelli asintotici

L'espressione della potenza interna della trave ottenuta attraverso la identificazione con il modello di trave di grado due:

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = - \int_0^L (\mathbf{s} \cdot (\mathbf{w}'_o - \mathbf{W}_o \mathbf{x}'_o) + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}') d\xi \quad (1.5.1)$$

è identica a quella ottenuta attraverso la identificazione con il continuo di Cauchy:

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = - \int_0^L (\mathbf{s} \cdot (\mathbf{w}'_o - \mathbf{W}_o \mathbf{x}'_o) + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_o) d\xi. \quad (1.5.2)$$

Nelle due identificazioni si può osservare una differenza sostanziale dovuta al diverso significato dei termini \mathbf{s} ed \mathbf{M} che descrivono gli sforzi della trave.

Nella identificazione con il modello di Cauchy \mathbf{s} ed \mathbf{M} sono descrittori dei campi di tensione sull'intera sezione, funzione del tensore di Cauchy variabile da punto a punto:

$$\mathbf{s} := \int_S \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 dA \quad (1.5.3)$$

$$\mathbf{M} := \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 dA \quad (1.5.4)$$

Nella identificazione con il modello di grado due i termini \mathbf{s} ed \mathbf{M} sono, invece, dei descrittori puntuali e variabili solamente lungo l'asse della trave. L'area della sezione compare, nelle definizioni di \mathbf{s} ed \mathbf{M} , come un semplice coefficiente di proporzionalità degli sforzi descritti dal tensore di grado uno \mathbf{T}_o e dal tensore di grado due \mathbb{T}_o :

$$\mathbf{s} = \mathcal{A} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \quad (1.5.5)$$

$$\mathbf{M} = \mathcal{A} \left(\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{a}_2 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1) + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{a}_3 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1) \right) \quad (1.5.6)$$

Questa diversità può essere colta valutando il comportamento di \mathbf{s} ed \mathbf{M} , e di \mathbf{s} ed \mathbf{M} quando si fa tendere a zero il valore dell'area \mathcal{A} . Dalle (1.5.5) e

(1.5.6) si trova infatti:

$$\lim_{\mathcal{A} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{A}} \mathbf{s} = \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \quad (1.5.7)$$

$$\lim_{\mathcal{A} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{A}} \mathbf{M} = \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{a}_2 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1) + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{a}_3 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1) \quad (1.5.8)$$

mentre dalle (1.5.3) e (1.5.4) si trova:

$$\lim_{\mathcal{A} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{A}} \mathbf{s} = \lim_{\mathcal{A} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{A}} \int_S \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 dA = \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 \quad (1.5.9)$$

$$\lim_{\mathcal{A} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{A}} \mathbf{M} = \lim_{\mathcal{A} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{A}} \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{T}_c \mathbf{a}_1 dA = \mathbf{O}. \quad (1.5.10)$$

Nella identificazione con il modello di Cauchy, dunque, il descrittore degli sforzi corrispondente agli atti di moto di rotazione della sezione tende a zero con l'area della sezione. Nella identificazione con il modello di grado due, invece, i descrittori della tensione della trave \mathbf{s} ed \mathbf{M} conservano ciascuno la propria identità stabilita, rispettivamente, dal tensore della tensione di grado uno \mathbf{T}_o e dal tensore della tensione di grado due \mathbb{T}_o . In questa differenza tra i due diversi approcci si colloca la maggiore capacità descrittiva e la potenzialità del modello di grado due.

1.6 Equazioni di bilancio in forma scalare

Esplicitate le espressioni dei descrittori \mathbf{s} e \mathbf{M} è possibile ricavare le equazioni differenziali di bilancio in forma scalare, cioè in termini delle caratteristiche di sollecitazione. Si considerino, a tal proposito, le (1.2.22) e (1.2.23):

$$\mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o} \quad (1.6.1)$$

$$\mathbf{M}' + \mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s} + \mathbf{C} = \mathbf{O} \quad (1.6.2)$$

e le equazioni di bilancio al bordo (1.2.8)–(1.2.11)

$$\mathbf{s}(0) = -\mathbf{s}^- \quad (1.6.3)$$

$$\mathbf{s}(L) = \mathbf{s}^+ \quad (1.6.4)$$

$$-\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}^- \quad (1.6.5)$$

$$\mathbf{M}(L) = \mathbf{M}^+. \quad (1.6.6)$$

Da queste risulta più comodo passare per le equazioni di bilancio in forma vettoriale:

$$\mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o} \quad (1.6.7)$$

$$\mathbf{m}' + \mathbf{x}'_o \times \mathbf{s} + \mathbf{c} = \mathbf{o} \quad (1.6.8)$$

dove:

$$\mathbf{m} = \mathcal{M}_1 \mathbf{a}_1 + \mathcal{M}_2 \mathbf{a}_2 + \mathcal{M}_3 \mathbf{a}_3. \quad (1.6.9)$$

In termini di componenti i primi termini delle (1.6.7) e (1.6.8) risultano:

$$\mathbf{s}' = \mathcal{N}' \mathbf{a}_1 + \mathcal{Q}'_2 \mathbf{a}_2 + \mathcal{Q}'_3 \mathbf{a}_3 + \mathcal{N}' \mathbf{a}'_1 + \mathcal{Q}'_2 \mathbf{a}'_2 + \mathcal{Q}'_3 \mathbf{a}'_3 \quad (1.6.10)$$

$$\mathbf{m}' = \mathcal{M}'_1 \mathbf{a}_1 + \mathcal{M}'_2 \mathbf{a}_2 + \mathcal{M}'_3 \mathbf{a}_3 + \mathcal{M}_1 \mathbf{a}'_1 + \mathcal{M}_2 \mathbf{a}'_2 + \mathcal{M}_3 \mathbf{a}'_3 \quad (1.6.11)$$

Essendo la terna $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ una terna ortonormale, è possibile esprimere le derivate dei vettori \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 e \mathbf{a}_3 , nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= \mathbf{K} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}'_2 &= \mathbf{K} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}'_3 &= \mathbf{K} \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

dove \mathbf{K} è un endomorfismo antisimmetrico che ammette, nella base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, la seguente rappresentazione matriciale:

$$[\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6.13)$$

e che dipende dalla disposizione nello spazio della terna dei vettori $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ rispetto all'asse della trave. Le (1.6.12), in termini di componenti, diventano:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= k_3 \mathbf{a}_2 - k_2 \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{a}'_2 &= -k_3 \mathbf{a}_1 + k_1 \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{a}'_3 &= k_2 \mathbf{a}_1 - k_1 \mathbf{a}_2. \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

Dalle (1.6.10) e (1.6.11) è possibile, dunque, ottenere, tenendo conto anche delle (1.6.14) le equazioni differenziali di bilancio in forma scalare:

$$\begin{cases} \mathcal{N}' - k_3 \mathcal{Q}_2 + k_2 \mathcal{Q}_3 + b_1 = 0 \\ \mathcal{Q}'_2 + k_3 \mathcal{N} - k_1 \mathcal{Q}_3 + b_2 = 0 \\ \mathcal{Q}'_3 - k_2 \mathcal{N} + k_1 \mathcal{Q}_2 + b_3 = 0 \end{cases} \quad (1.6.15)$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}'_1 - k_3 \mathcal{M}_2 + k_2 \mathcal{M}_3 + \gamma_2 \mathcal{Q}_3 - \gamma_3 \mathcal{Q}_2 + c_1 = 0 \\ \mathcal{M}'_2 + k_3 \mathcal{M}_1 - k_1 \mathcal{M}_3 - \lambda \mathcal{Q}_3 + \gamma_3 \mathcal{N} + c_2 = 0 \\ \mathcal{M}'_3 - k_2 \mathcal{M}_1 + k_1 \mathcal{M}_2 + \lambda \mathcal{Q}_2 - \gamma_2 \mathcal{N} + c_3 = 0 \end{cases} \quad (1.6.16)$$

Per quanto riguarda il tensore \mathbf{K} si osservi che per il generico vettore di base \mathbf{a}_i si ha, nella configurazione iniziale e nella configurazione attuale, della trave rispettivamente:

$$\bar{\mathbf{a}}'_i = \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{a}}_i \quad (1.6.17)$$

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{K} \mathbf{a}_i \quad (1.6.18)$$

essendo inoltre

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{R} \bar{\mathbf{a}}_i \quad (1.6.19)$$

si ricava, per derivazione

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_i &= \mathbf{R}' \bar{\mathbf{a}}_i + \mathbf{R} \bar{\mathbf{a}}'_i \\ &= (\mathbf{R}' + \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}) \bar{\mathbf{a}}_i \\ &= (\mathbf{R}' + \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{R}^\top \mathbf{a}_i. \end{aligned}$$

Risulta in definitiva

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R}' + \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{R}^\top \quad (1.6.20)$$

per mezzo della quale è possibile determinare la configurazione della terna $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ in funzione della configurazione della terna $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$ e della deformazione \mathbf{R} .

La relazione (1.6.20) risulta più evidente in forma scalare. Si può scrivere infatti:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^\top \mathbf{K} \mathbf{R} &= \mathbf{R}^\top \mathbf{R}' + \bar{\mathbf{K}} \\ \Rightarrow \mathbf{R}^\top \mathbf{K} \mathbf{R} \bar{\mathbf{a}}_1 &= \mathbf{R}^\top \mathbf{R}' \bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{a}}_1 \\ \Rightarrow \mathbf{R}^\top \mathbf{K} \mathbf{a}_1 &= \Gamma \bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{a}}_1\end{aligned}$$

in cui si è posto

$$\Gamma := \mathbf{R}^\top \mathbf{R}' \quad (1.6.21)$$

che essendo un tensore antisimmetrico ammette, in generale nella base $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$, la seguente rappresentazione matriciale:

$$[\Gamma] = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6.22)$$

In termini di componenti si ha, dunque:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^\top (k_3 \mathbf{a}_2 - k_2 \mathbf{a}_3) &= (\eta_3 \bar{\mathbf{a}}_2 - \eta_2 \bar{\mathbf{a}}_3) + (\bar{k}_3 \bar{\mathbf{a}}_2 - \bar{k}_2 \bar{\mathbf{a}}_3) \\ \Rightarrow (k_3 \bar{\mathbf{a}}_2 - k_2 \bar{\mathbf{a}}_3) &= (\eta_3 \bar{\mathbf{a}}_2 - \eta_2 \bar{\mathbf{a}}_3) + (\bar{k}_3 \bar{\mathbf{a}}_2 - \bar{k}_2 \bar{\mathbf{a}}_3).\end{aligned}$$

In definitiva si ottiene:

$$k_1 = \eta_1 + \bar{k}_1 \quad (1.6.23)$$

$$k_2 = \eta_2 + \bar{k}_2 \quad (1.6.24)$$

$$k_3 = \eta_3 + \bar{k}_3. \quad (1.6.25)$$

1.7 Equazioni lineari di bilancio

Nell'ambito della *teoria delle piccole deformazioni* restano ancora valide le ipotesi che permettono di considerare le deformazioni sufficientemente piccole da poter identificare, per le equazioni di bilancio, le coordinate dei punti nella configurazione corrente con le coordinate degli stessi punti nella configurazione iniziale. In particolare risulta per il vettore tangente all'asse della trave:

$$\mathbf{x}'_o = \bar{\mathbf{x}}'_o = \bar{\mathbf{a}}_1. \quad (1.7.1)$$

Dalle (1.2.22) e (1.2.23) si ottengono, dunque, le seguenti equazioni lineari di bilancio:

$$\mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o} \quad (1.7.2)$$

$$\mathbf{M}' + \text{skw}(\bar{\mathbf{a}}_1 \otimes \mathbf{s}) + \mathbf{C} = \mathbf{O}. \quad (1.7.3)$$

Le equazioni di bilancio al bordo (1.2.8)–(1.2.11) rimangono invariate.

1.7.1 Potenza virtuale esterna

Si consideri la espressione della potenza esterna

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} + \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}, \quad (1.7.4)$$

in cui, trattandosi di piccole deformazioni, \mathbf{w} è il termine di ordine 0 della (1.3.9)

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_o + \mathbf{W}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o). \quad (1.7.5)$$

È immediato verificare che i descrittori della potenza esterna assumono la seguente forma:

$$\mathbf{b} = \int_S \mathbf{b} \, dA + \int_{\partial S} \mathbf{t} \, d\ell \quad (1.7.6)$$

$$\mathbf{C} = \int_S (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \otimes \mathbf{b} \, dA + \int_{\partial S} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \otimes \mathbf{t} \, d\ell \quad (1.7.7)$$

$$\mathbf{s}^\pm = \int_{S^\pm} \mathbf{t} \, dA \quad (1.7.8)$$

$$\mathbf{M}^\pm = \int_{S^\pm} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \otimes \mathbf{t} \, dA. \quad (1.7.9)$$

1.7.2 Potenza virtuale interna

Nell'espressione della potenza virtuale interna $\mathcal{W}_h^{(int)}$ del cilindro tangente $\mathcal{C}_{\xi,h}(\zeta_1, \mathbf{y})$, trattandosi di piccole deformazioni, i tensori \mathbf{G}_o e \mathbb{G}_o sono valutati in corrispondenza dei vettori $\bar{\mathbf{a}}_1$, $\bar{\mathbf{a}}_2$ e $\bar{\mathbf{a}}_3$. In termini dei tensori della tensione \mathbf{T}_o e \mathbb{T}_o si ottiene allora per i descrittori della potenza interna:

$$\mathbf{s} = \mathcal{A} \mathbf{T}_o \bar{\mathbf{a}}_1 \quad (1.7.10)$$

$$\mathbf{M} = \mathcal{A} \left(\bar{\mathbf{a}}_2 \otimes (\mathbb{T}_o \bar{\mathbf{a}}_1 \bar{\mathbf{a}}_2 + \mathbb{T}_o \bar{\mathbf{a}}_2 \bar{\mathbf{a}}_1) + \bar{\mathbf{a}}_3 \otimes (\mathbb{T}_o \bar{\mathbf{a}}_1 \bar{\mathbf{a}}_3 + \mathbb{T}_o \bar{\mathbf{a}}_3 \bar{\mathbf{a}}_1) \right) \quad (1.7.11)$$

o equivalentemente, esplicitando le caratteristiche di sollecitazione

$$\mathcal{N} = \mathcal{A} f_{11} \quad (1.7.12)$$

$$\mathcal{Q}_2 = \mathcal{A} f_{21} \quad (1.7.13)$$

$$\mathcal{Q}_3 = \mathcal{A} f_{31} \quad (1.7.14)$$

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{A} ((f_{321} + f_{312}) - (f_{231} + f_{213})) \quad (1.7.15)$$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{A} (f_{131} + f_{113}) \quad (1.7.16)$$

$$\mathcal{M}_3 = -\mathcal{A} (f_{121} + f_{112}) \quad (1.7.17)$$

Capitolo 2

Trave con sezione affine

2.1 Modello diretto

Per descrivere atti di moto più complessi che non vengono considerati dal modello di trave di Timoshenko, si può, a partire dalla descrizione del campo di velocità, prevedere per i descrittori \mathbf{G}_o e \mathbb{G}_o del continuo di grado due una maggiore capacità descrittiva, e quindi una forma più ricca e dettagliata. Così, ad esempio, è possibile studiare un modello di trave in cui gli atti di moto delle sezioni non siano solamente atti di moto rigido, bensì atti di moto affini, risultando, così, le sezioni deformabili nel loro piano.

2.1.1 Moto

Gli atti di moto per il modello di trave con sezione affine possono essere descritti dai campi vettoriali

$$\mathbf{w}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) = \mathbf{w}_o(\xi) + \mathbf{G}_S(\xi)(\mathbf{x}(\xi, \zeta_2, \zeta_3) - \mathbf{x}_o(\xi)). \quad (2.1.1)$$

Per il tensore \mathbf{G}_S si assume, nella base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, la seguente matrice:

$$[\mathbf{G}_S] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & \delta_1 \\ 0 & \delta_1 & \delta_3 \end{pmatrix}. \quad (2.1.2)$$

dove δ_2 , δ_3 e δ_1 rappresentano, rispettivamente le velocità di dilatazione della sezione lungo l'asse \mathbf{a}_2 e lungo l'asse \mathbf{a}_3 , e la velocità di scorrimento nel piano della sezione.

2.1.2 Equazioni di bilancio

Le equazioni di bilancio si possono direttamente formulare considerando come descrittori degli atti di moto le funzioni $(\mathbf{w}_o(\xi), \mathbf{G}_S(\xi))$, come suggerito dalla (2.1.1), e quindi, come descrittori del gradiente degli atti di moto, le funzioni $(\mathbf{w}_o, \mathbf{w}'_o, \mathbf{G}_S, \mathbf{G}'_S)$.

Per la potenza esterna si può, dunque, assumere la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{G}_S) &= \int_0^L (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}_S) d\xi \\ &+ \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{w}_o^- + \mathbf{M}^- \cdot \mathbf{G}_S^- + \mathbf{s}^+ \cdot \mathbf{w}_o^+ + \mathbf{M}^+ \cdot \mathbf{G}_S^+, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

mentre per la potenza interna si assume la espressione

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{G}_S) = - \int_0^L (\mathbf{s}_o \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{G}_S + \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}'_S) d\xi \quad (2.1.4)$$

Sommando la (2.1.3) e la (2.1.4) la potenza totale in un atto di moto virtuale risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{G}_S) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{G}_S) &= \int_0^L (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}_S) d\xi \\ &+ \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{w}_o^- + \mathbf{M}^- \cdot \mathbf{G}_S^- + \mathbf{s}^+ \cdot \mathbf{w}_o^+ + \mathbf{M}^+ \cdot \mathbf{G}_S^+ \\ &- \int_0^L (\mathbf{s}_o \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{G}_S + \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}'_S) d\xi \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Attraverso la integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int_0^L (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}'_S) d\xi &= - \int_0^L (\mathbf{s}' \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{M}' \cdot \mathbf{G}_S) d\xi \\ &+ \mathbf{s}(L) \cdot \mathbf{w}_o^+ + \mathbf{M}(L) \cdot \mathbf{G}_S^+ - \mathbf{s}(0) \cdot \mathbf{w}_o^- - \mathbf{M}(0) \cdot \mathbf{G}_S^- \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

la (2.1.5) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{G}_S) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{G}_S) &= \int_0^L ((\mathbf{s}_o + \mathbf{s}' + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{w}_o + (\mathbf{M}' - \mathbf{Z} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{G}_S) d\xi \\ &+ (\mathbf{s}^- + \mathbf{s}(0)) \cdot \mathbf{w}_o^- + (\mathbf{M}^- + \mathbf{M}(0)) \cdot \mathbf{G}_S^- \\ &+ (\mathbf{s}^+ - \mathbf{s}(L)) \cdot \mathbf{w}_o^+ + (\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}(L)) \cdot \mathbf{G}_S^+ \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

La condizione che *la potenza virtuale sia nulla per ogni atto di moto* fornisce le equazioni differenziali di bilancio

$$\mathbf{s}_o + \mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o} \quad (2.1.8)$$

$$\mathbf{M}' - \mathbf{Z} + \mathbf{C} = \mathbf{o} \quad (2.1.9)$$

assieme alle equazioni di bilancio al bordo

$$-\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}^- \quad (2.1.10)$$

$$\mathbf{s}(L) = \mathbf{s}^+ \quad (2.1.11)$$

$$-\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}^- \quad (2.1.12)$$

$$\mathbf{M}(L) = \mathbf{M}^+ \quad (2.1.13)$$

Un atto di moto rigido può in generale avere la seguente rappresentazione

$$\mathbf{w}_o(\xi) = \mathbf{w}_o(0) + \mathbf{W}_o(0)(\mathbf{x}_o(\xi) - \mathbf{x}_o(0)), \quad (2.1.14)$$

$$\mathbf{W}_o(\xi) = \mathbf{W}_o(0), \quad (2.1.15)$$

da cui, derivando, si ottiene

$$\mathbf{w}'_o(\xi) = \mathbf{W}_o(0)\mathbf{x}'_o(\xi), \quad (2.1.16)$$

$$\mathbf{W}'_o(\xi) = \mathbf{O}. \quad (2.1.17)$$

Ponendo

$$\widehat{\mathbf{W}}_o := \mathbf{W}_o(0) \quad (2.1.18)$$

$$\widehat{\mathbf{w}}_o := \mathbf{w}_o(0) \quad (2.1.19)$$

la condizione che *per ogni atto di moto rigido la densità di potenza interna sia nulla* equivale alla seguente relazione:

$$\mathbf{s}_o \cdot \widehat{\mathbf{w}}_o + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{G}_S + \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}'_S = 0 \quad \forall \widehat{\mathbf{w}}_o, \widehat{\mathbf{W}}_o \quad (2.1.20)$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{s}_o \cdot \widehat{\mathbf{w}}_o + \mathbf{s} \cdot \widehat{\mathbf{W}}_o \mathbf{x}'_o + \mathbf{Z} \cdot \widehat{\mathbf{W}}_o = 0 \quad (2.1.21)$$

$$\Rightarrow \mathbf{s}_o \cdot \widehat{\mathbf{w}}_o + (\mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s} + \mathbf{Z}) \cdot \widehat{\mathbf{W}}_o = 0 \quad (2.1.22)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{skw } \mathbf{Z} = -\text{skw } (\mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s}) \\ \mathbf{s}_o = \mathbf{o} \end{cases} \quad (2.1.23)$$

Le equazioni di bilancio diventano dunque

$$\mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o} \quad (2.1.24)$$

$$\mathbf{M}' - \text{sym } \mathbf{Z} + \text{skw } (\mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s}) + \mathbf{C} = \mathbf{O}. \quad (2.1.25)$$

2.1.3 Potenza virtuale esterna

L'espressione della potenza virtuale esterna $\mathcal{W}^{(ext)}$, corrispondente ad una densità di forza di volume \mathbf{b} e ad una densità di forza di bordo \mathbf{t} è data dalla seguente espressione:

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} dV, \quad (2.1.26)$$

in cui

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_o + \mathbf{G}_S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o). \quad (2.1.27)$$

In corrispondenza di una deformazione $\phi : \bar{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}$ si ha, indicando con β il determinante di $\nabla\phi$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \beta dV \\ &= \int_0^L \left(\int_S \mathbf{b} \beta dA \right) \cdot \mathbf{w}_o d\xi + \int_0^L \left(\int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{b} \beta dA \right) \cdot \mathbf{G}_S d\xi \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

In maniera del tutto analoga si può scrivere per \mathbf{t} :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} &= \int_0^L \left(\int_{\partial S} \mathbf{t} \beta dl \right) \cdot \mathbf{w}_o d\xi + \int_0^L \left(\int_{\partial S} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{t} \beta dl \right) \cdot \mathbf{G}_S d\xi \\ &\quad + \left(\int_{S^-} \mathbf{t} dA \right) \cdot \mathbf{w}_o^- + \left(\int_{S^-} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{t} dA \right) \cdot \mathbf{G}_S^- \\ &\quad + \left(\int_{S^+} \mathbf{t} dA \right) \cdot \mathbf{w}_o^+ + \left(\int_{S^+} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{t} dA \right) \cdot \mathbf{G}_S^+ \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

In questa si possono riconoscere i descrittori delle forze estere presenti nelle equazioni di bilancio:

$$\mathbf{b} = \int_S \mathbf{b} \beta dA + \int_{\partial S} \mathbf{t} \beta dl \quad (2.1.30)$$

$$\mathbf{C} = \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{b} \beta dA + \int_{\partial S} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{t} \beta dl \quad (2.1.31)$$

$$\mathbf{s}^\pm = \int_{S^\pm} \mathbf{t} dA \quad (2.1.32)$$

$$\mathbf{M}^\pm = \int_{S^\pm} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{t} dA. \quad (2.1.33)$$

2.2 Identificazione con il continuo di grado due

2.2.1 Moto

La corrispondenza tra il campo di velocità del cilindro $\mathcal{C}_{\xi,h}$ ed il campo di velocità della sezione è stabilita attraverso le seguenti espressioni:

$$\mathbf{G}_o \mathbf{x}'_o = \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{w}'_o, \quad (2.2.1)$$

$$\mathbf{G}_o \mathbf{a}_2 = \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \zeta_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{G}_S \mathbf{a}_2, \quad (2.2.2)$$

$$\mathbf{G}_o \mathbf{a}_3 = \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \zeta_3} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{G}_S \mathbf{a}_3, \quad (2.2.3)$$

e per il tensore \mathbb{G}_o :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{x}'_o := \mathbf{o}, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{a}_2 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \xi \partial \zeta_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{G}'_S \mathbf{a}_2, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{x}'_o \mathbf{a}_3 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \xi \partial \zeta_3} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{G}'_S \mathbf{a}_3, \end{array} \right. \quad (2.2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{G}_o \mathbf{a}_2 \mathbf{x}'_o = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_2 \partial \xi} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{G}'_S \mathbf{a}_2, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{o}, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_3} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{o}, \end{array} \right. \quad (2.2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{G}_o \mathbf{a}_3 \mathbf{x}'_o = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_3 \partial \xi} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{G}'_S \mathbf{a}_3, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_3 \partial \zeta_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{o}, \\ \mathbb{G}_o \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \zeta_3 \partial \zeta_3} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} = \mathbf{o}, \end{array} \right. \quad (2.2.6)$$

Tenendo, dunque, conto della (2.1.2) la matrice del tensore \mathbf{G}_o si può scrivere, secondo la base $\{\mathbf{x}'_o, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, nel seguente modo:

$$[\mathbf{G}_o] = \begin{pmatrix} w'_{o1} & -\omega_3 & \omega_2 \\ w'_{o2} & \delta_2 & -\omega_1 + \delta_1 \\ w'_{o3} & \omega_1 + \delta_1 & \delta_3 \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

la matrice del tensore \mathbb{G}_o è invece:

$$[\mathbb{G}_o] = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ 0 & \delta'_2 & -\omega'_1 + \delta'_1 \\ 0 & \omega'_1 + \delta'_1 & \delta'_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\omega'_3 & 0 & 0 \\ \delta'_2 & 0 & 0 \\ \omega'_1 + \delta'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \omega'_2 & 0 & 0 \\ -\omega'_1 + \delta'_1 & 0 & 0 \\ \delta'_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

2.2.2 Potenza virtuale interna

La potenza virtuale interna $\mathcal{W}_h^{(int)}$ del cilindro tangente $\mathcal{C}_{\xi,h}$, in quanto corpo di grado due, ammette la seguente espressione :

$$\mathcal{W}_h^{(int)} := -(\mathbf{T}_o \cdot \mathbf{G}_o + \mathbb{T}_o \cdot \mathbb{G}_o) \text{vol}(\mathcal{R}_{\xi,h}). \quad (2.2.9)$$

Per il contributo di grado uno della potenza interna si ha, dalla (1.4.32):

$$\mathbf{T}_o \cdot \mathbf{G}_o = \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{G}_o \mathbf{x}'_o + \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{G}_o \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{G}_o \mathbf{a}_3. \quad (2.2.10)$$

che diventa stante (2.2.1)–(2.2.3)

$$\mathbf{T}_o \cdot \mathbf{G}_o = \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{w}'_o + \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{G}_S \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{G}_S \mathbf{a}_3. \quad (2.2.11)$$

Ponendo

$$\mathbf{D}_S := \mathbf{G}_S - \mathbf{W}_o \quad (2.2.12)$$

la (2.2.11) si scrive, tenendo conto della (1.4.37)

$$\mathbf{T}_o \cdot \mathbf{G}_o = \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}_o \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G}_o - \mathbf{W}_o) \mathbf{x}'_o + \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{D}_S \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{D}_S \mathbf{a}_3. \quad (2.2.13)$$

L'identificazione della potenza interna $\mathcal{W}_h^{(int)}$ del cilindro con la densità di potenza interna della sezione \mathcal{S} , relativamente alla potenza corrispondente al tensore \mathbf{D}_S , è data dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} \varpi^{(int)} &:= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{R}_{\xi, h}} \left(\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{D}_S \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{D}_S \mathbf{a}_3 \right) dV \\ &= \mathcal{A} \left(\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{D}_S \mathbf{a}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{T}_o \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{D}_S \mathbf{a}_3 \right) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Introducendo le seguenti *caratteristiche di sollecitazione*:

$$\mathcal{F}_1 := \mathcal{A} \left(\frac{1}{\alpha_2} f_{23} + \frac{1}{\alpha_3} f_{32} \right) \quad (2.2.15)$$

$$\mathcal{F}_2 := \mathcal{A} \frac{1}{\alpha_2} f_{22} \quad (2.2.16)$$

$$\mathcal{F}_3 := \mathcal{A} \frac{1}{\alpha_3} f_{33} \quad (2.2.17)$$

risulta

$$\varpi^{(int)} = \mathcal{F}_1 \delta_1 + \mathcal{F}_2 \delta_2 + \mathcal{F}_3 \delta_3. \quad (2.2.18)$$

In termini tensoriali si può, dunque, definire:

$$\check{\mathbf{Z}} := - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{R}_{\xi, h}} \left(\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{T}_o \mathbf{n}_3 \right) dV \quad (2.2.19)$$

da cui si ottiene:

$$\check{\mathbf{Z}} := \mathcal{A} \left(\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{T}_o \mathbf{n}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{T}_o \mathbf{n}_3 \right) \quad (2.2.20)$$

tale che

$$\text{sym } \mathbf{Z} = \check{\mathbf{Z}} \quad (2.2.21)$$

Il termine di grado due della potenza interna può essere ricavato direttamente dalla (1.4.59)

$$\mathbb{T}_o \cdot \mathbb{G}_o = \left(\frac{1}{\lambda \alpha_2} \mathbf{a}_2 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1) + \frac{1}{\lambda \alpha_3} \mathbf{a}_3 \otimes (\mathbb{T}_o \mathbf{a}_1 \mathbf{n}_3 + \mathbb{T}_o \mathbf{n}_3 \mathbf{a}_1) \right) \cdot \mathbf{G}'_S. \quad (2.2.22)$$

Considerando solo la potenza spesa nel gradiente secondo in corrispondenza di atti di moto affini della sezione si ha, in tal caso, per il descrittore \mathbf{M} la seguente rappresentazione matriciale:

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} (f_{221} + f_{212}) & \frac{1}{\alpha_3} (f_{231} + f_{213}) \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} (f_{321} + f_{312}) & \frac{1}{\alpha_3} (f_{331} + f_{313}) \end{pmatrix}. \quad (2.2.23)$$

Si possono allora definire le seguenti *caratteristiche di sollecitazione*:

$$\mathcal{T}_1 := \mathcal{A} \left(\frac{1}{\alpha_2} (f_{321} + f_{312}) + \frac{1}{\alpha_3} (f_{231} + f_{213}) \right) \quad (2.2.24)$$

$$\mathcal{T}_2 := \mathcal{A} \frac{1}{\alpha_3} (f_{221} + f_{212}) \quad (2.2.25)$$

$$\mathcal{T}_3 := -\mathcal{A} \frac{1}{\alpha_2} (f_{331} + f_{313}). \quad (2.2.26)$$

Considerando sia i termini di grado uno e che di grado due si ritrova per la potenza interna della trave l'espressione (2.1.4) con le condizioni (2.1.23):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = & - \int_0^L (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o - \mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s} \cdot \mathbf{W}_o + \text{sym } \mathbf{Z} \cdot \mathbf{D}_S + \\ & + \text{skw } \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_o + \text{sym } \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}'_S) d\xi. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

2.2.3 Equazioni di bilancio in forma scalare

Per esplicitate le equazioni differenziali di bilancio in forma scalare, cioè in termini delle caratteristiche di sollecitazione, risulta più comodo passare per le equazioni di bilancio in forma vettoriale:

$$\mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o} \quad (2.2.28)$$

$$\mathbf{m}' + \mathbf{x}'_o \times \mathbf{s} + \mathbf{c} = \mathbf{o} \quad (2.2.29)$$

$$\boldsymbol{\tau}' - \mathbf{z} + \mathbf{q} = \mathbf{o} \quad (2.2.30)$$

dove:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathcal{T}_1 \mathbf{a}_1 + \mathcal{T}_2 \mathbf{a}_2 + \mathcal{T}_3 \mathbf{a}_3 \quad (2.2.31)$$

$$\mathbf{z} = \mathcal{F}_1 \mathbf{a}_1 + \mathcal{F}_2 \mathbf{a}_2 + \mathcal{F}_3 \mathbf{a}_3. \quad (2.2.32)$$

Le equazioni differenziali di bilancio in forma scalare sono date dalle seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \mathcal{N}' - k_3 \mathcal{Q}_2 + k_2 \mathcal{Q}_3 + b_1 = 0 \\ \mathcal{Q}'_2 + k_3 \mathcal{N} - k_1 \mathcal{Q}_3 + b_2 = 0 \\ \mathcal{Q}'_3 - k_2 \mathcal{N} + k_1 \mathcal{Q}_2 + b_3 = 0 \end{cases} \quad (2.2.33)$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}'_1 - k_3 \mathcal{M}_2 + k_2 \mathcal{M}_3 + \gamma_2 \mathcal{Q}_3 - \gamma_3 \mathcal{Q}_2 + c_1 = 0 \\ \mathcal{M}'_2 + k_3 \mathcal{M}_1 - k_1 \mathcal{M}_3 - \lambda \mathcal{Q}_3 + \gamma_3 \mathcal{N} + c_2 = 0 \\ \mathcal{M}'_3 - k_2 \mathcal{M}_1 + k_1 \mathcal{M}_2 + \lambda \mathcal{Q}_2 - \gamma_2 \mathcal{N} + c_3 = 0 \end{cases} \quad (2.2.34)$$

$$\begin{cases} \mathcal{T}'_1 - k_3 \mathcal{T}_2 + k_2 \mathcal{T}_3 - \mathcal{F}_1 + q_1 = 0 \\ \mathcal{T}'_2 + k_3 \mathcal{T}_1 - k_1 \mathcal{T}_3 - \mathcal{F}_2 + q_2 = 0 \\ \mathcal{T}'_3 - k_2 \mathcal{T}_1 + k_1 \mathcal{T}_2 - \mathcal{F}_3 + q_3 = 0 \end{cases} \quad (2.2.35)$$

Capitolo 3

Trave come continuo monodimensionale di grado due

3.1 Modello diretto

La formulazione delle equazioni di bilancio per il modello di trave di grado due, inteso come continuo monodimensionale, si ottiene considerando come descrittori degli atti di moto le funzioni $\mathbf{w}_o(\xi)$, $\mathbf{w}'_o(\xi)$, $\mathbf{W}_o(\xi)$ e quindi, come descrittori del gradiente degli atti di moto, le funzioni $\mathbf{w}_o(\xi)$, $\mathbf{w}'_o(\xi)$, $\mathbf{w}''_o(\xi)$, $\mathbf{W}_o(\xi)$, $\mathbf{W}'_o(\xi)$

Per la *potenza esterna* si può, dunque, assumere la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) = & \int_0^L (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}_o) d\xi + \\ & + \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{w}_o^- + \mathbf{q}^- \cdot \mathbf{w}'_o^- + \mathbf{M}^- \cdot \mathbf{W}_o^- + \mathbf{s}^+ \cdot \mathbf{w}_o^+ + \mathbf{q}^+ \cdot \mathbf{w}'_o^+ + \mathbf{M}^+ \cdot \mathbf{W}_o^+ \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

mentre per la *potenza interna* si assume la espressione

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) = - \int_0^L (\mathbf{s}_o \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{q} \cdot \mathbf{w}''_o + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}_o + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_o) d\xi \quad (3.1.2)$$

Sommando la (3.1.1) e la (3.1.2) la potenza totale in un atto di moto virtuale

risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) &= \int_0^L (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}_o) d\xi \\ &+ \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{w}_o^- + \mathbf{q}^- \cdot \mathbf{w}'_o^- + \mathbf{M}^- \cdot \mathbf{W}_o^- + \mathbf{q}^+ \cdot \mathbf{w}'_o^+ + \mathbf{s}^+ \cdot \mathbf{w}_o^+ + \mathbf{M}^+ \cdot \mathbf{W}_o^+ \\ &- \int_0^L (\mathbf{s}_o \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{q} \cdot \mathbf{w}''_o + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}_o + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_o) d\xi \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Attraverso la integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int_0^L (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{q} \cdot \mathbf{w}''_o + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_o) d\xi &= - \int_0^L (\mathbf{s}' \cdot \mathbf{w}_o - \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{M}' \cdot \mathbf{W}_o) d\xi + \\ &+ \mathbf{s}(L) \cdot \mathbf{w}_o^+ + \mathbf{q}(L) \cdot \mathbf{w}'_o^+ - \mathbf{q}'(L) \cdot \mathbf{w}_o^+ + \mathbf{M}(L) \cdot \mathbf{W}_o^+ + \\ &- \mathbf{s}(0) \cdot \mathbf{w}_o^- - \mathbf{q}(0) \cdot \mathbf{w}'_o^- + \mathbf{q}'(0) \cdot \mathbf{w}_o^- - \mathbf{M}(0) \cdot \mathbf{W}_o^- \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

la (3.1.3) diventa

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o \quad (3.1.5)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \mathbf{W}_o) &= \\ &= \int_0^L ((\mathbf{s}_o + \mathbf{s}' - \mathbf{q}'' + \mathbf{b} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{w}_o + (\mathbf{M}' - \mathbf{Z} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{W}_o) d\xi + \\ &+ (\mathbf{s}^- + \mathbf{s}(0) - \mathbf{p}(0) - \mathbf{q}'(0)) \cdot \mathbf{w}_o^- + (\mathbf{q}^- + \mathbf{q}(0)) \cdot \mathbf{w}'_o^- + (\mathbf{M}^- + \mathbf{M}(0)) \cdot \mathbf{W}_o^- + \\ &+ (\mathbf{s}^+ - \mathbf{s}(L) + \mathbf{p}(L) + \mathbf{q}'(L)) \cdot \mathbf{w}_o^+ + (\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}(L)) \cdot \mathbf{w}'_o^+ + (\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}(L)) \cdot \mathbf{W}_o^+ \end{aligned}$$

La condizione che *principio della potenza virtuale sia nulla per ogni atto di moto* fornisce le *equazioni differenziali di bilancio*

$$\mathbf{s}_o + (\mathbf{b} - \mathbf{p}') + (\mathbf{s} - \mathbf{q}')' = \mathbf{o} \quad (3.1.6)$$

$$\mathbf{M}' - \mathbf{Z} + \mathbf{C} = \mathbf{o} \quad (3.1.7)$$

assieme alle *equazioni di bilancio al bordo*

$$\mathbf{s}^- + \mathbf{s}(0) - \mathbf{p}(0) - \mathbf{q}'(0) = \mathbf{o} \quad (3.1.8)$$

$$\mathbf{q}^- + \mathbf{q}(0) = \mathbf{o} \quad (3.1.9)$$

$$\mathbf{M}^- + \mathbf{M}(0) = \mathbf{O} \quad (3.1.10)$$

$$\mathbf{s}^+ - \mathbf{s}(L) + \mathbf{p}(L) + \mathbf{q}'(L) = \mathbf{o} \quad (3.1.11)$$

$$\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}'(L) = \mathbf{o} \quad (3.1.12)$$

$$\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}(L) = \mathbf{O} \quad (3.1.13)$$

Un atto di moto rigido può in generale avere la seguente rappresentazione

$$\mathbf{w}_o(\xi) = \mathbf{w}_o(0) + \mathbf{W}_o(0)(\mathbf{x}_o(\xi) - \mathbf{x}_o(0)), \quad (3.1.14)$$

$$\mathbf{W}_o(\xi) = \mathbf{W}_o(0), \quad (3.1.15)$$

da cui, derivando, si ottiene

$$\mathbf{w}'_o(\xi) = \mathbf{W}_o(0)\mathbf{x}'_o(\xi) \quad (3.1.16)$$

$$\mathbf{w}''_o(\xi) = \mathbf{W}_o(0)\mathbf{x}''_o(\xi) \quad (3.1.17)$$

$$\mathbf{W}'_o(\xi) = \mathbf{O} \quad (3.1.18)$$

Ponendo

$$\widehat{\mathbf{W}}_o := \mathbf{W}_o(0) \quad (3.1.19)$$

$$\widehat{\mathbf{w}}_o := \mathbf{w}_o(0) \quad (3.1.20)$$

la condizione che *principio di obiettività per ogni atto di moto rigido la densità di potenza interna sia nulla* equivale alla seguente relazione:

$$\mathbf{s}_o \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{q} \cdot \mathbf{w}''_o + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}_o + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}'_o = 0 \quad \forall \widehat{\mathbf{w}}_o, \widehat{\mathbf{W}}_o \quad (3.1.21)$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{s}_o \cdot \widehat{\mathbf{w}}_o + \mathbf{s} \cdot \widehat{\mathbf{W}}_o \mathbf{x}'_o + \mathbf{q} \cdot \widehat{\mathbf{W}}_o \mathbf{x}''_o + \mathbf{Z} \cdot \widehat{\mathbf{W}}_o = 0 \quad (3.1.22)$$

$$\Rightarrow \mathbf{s}_o \cdot \widehat{\mathbf{w}}_o + (\mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s} + \mathbf{x}''_o \otimes \mathbf{q} + \mathbf{Z}) \cdot \widehat{\mathbf{W}}_o = 0 \quad (3.1.23)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s} + \mathbf{x}''_o \otimes \mathbf{q} + \mathbf{Z} = \mathbf{O} \\ \mathbf{s}_o = \mathbf{o} \end{cases} \quad (3.1.24)$$

Le equazioni di bilancio diventano dunque

$$(\mathbf{b} - \mathbf{p}') + (\mathbf{s} - \mathbf{q}')' = \mathbf{o} \quad (3.1.25)$$

$$\mathbf{M}' + \text{skw}(\mathbf{x}'_o \otimes \mathbf{s} + \mathbf{x}''_o \otimes \mathbf{q}) + \mathbf{C} = \mathbf{O} \quad (3.1.26)$$

Osservando che

$$\mathbf{x}_o'' \otimes \mathbf{q} = (\mathbf{x}_o' \otimes \mathbf{q})' - \mathbf{x}_o' \otimes \mathbf{q}'$$

si può scrivere

$$\left(\mathbf{M} + \text{skw}(\mathbf{x}_o' \otimes \mathbf{q}) \right)' + \text{skw}(\mathbf{x}_o' \otimes (\mathbf{s} - \mathbf{q}')) + \mathbf{C} = \mathbf{O} \quad (3.1.27)$$

Ponendo

$$\tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{b} - \mathbf{p}' \quad (3.1.28)$$

$$\tilde{\mathbf{s}} := \mathbf{s} - \mathbf{q}' \quad (3.1.29)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} := \mathbf{M} + \text{skw}(\mathbf{x}_o' \otimes \mathbf{q}) \quad (3.1.30)$$

le equazioni di bilancio diventano

$$\tilde{\mathbf{s}}' + \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{o} \quad (3.1.31)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}' + \text{skw}(\mathbf{x}_o' \otimes \tilde{\mathbf{s}}) + \mathbf{C} = \mathbf{O} \quad (3.1.32)$$

Bibliografia

- [1] P. Germain: *The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics*, SIAM J. Appl. Math, 1973.
- [2] P. Germain: *La Méthode des Puissances Virtualles en Mécanique des Milieux Continus*, Journal de Mécanique, 1973.
- [3] M. E. Gurtin: *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, 1981.
- [4] C. Truesdell: *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Academic Press, 1977.
- [5] P. G. Ciarlet: *Mathematical Elasticity*, North Holland, 1988.
- [6] J. E. Marsden - T. J. R. Hughes: *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, 1983.
- [7] E. Benvenuto: *La Scienza delle Costruzioni e il suo Sviluppo Storico*, Sansoni Editore, 1981.