

# MODELLI MONODIMENSIONALI PER TRAVI MULTISTRATO

A. TATONE

*Disat, Facoltà di Ingegneria, Università de L'Aquila  
67040 Monteluco di Roio (L'Aquila)*

## SOMMARIO

Si definisce un continuo monodimensionale per travi multistrato piane come unione di modelli di trave alla Cosserat. Attraverso la espressione della potenza interna risulta definito in modo naturale uno sforzo interlaminare, con una parte singolare al bordo. Le equazioni di bilancio locali e al bordo sono poi ottenute dalla espressione della potenza.

## ABSTRACT

A one-dimensional model for multilayered planar beams is defined by joining one-dimensional beam models *à la* Cosserat together. An interlaminar stress arises naturally from the expression of the inner working, and its singular part at the boundary as well. Local and boundary balance equations are derived from an assumed expression for the working.

## 1. CONTINUO MULTISTRATO

Si consideri una trave piana composta da più strati. Invece di utilizzare il modello di continuo di Cauchy e assegnare una interpolazione del campo di spostamento sulla sezione, come nella teoria *layerwise* in [4] e [3], si assume per ciascuno strato un modello di trave alla Cosserat, sviluppando l'idea iniziale di [2]. Questa scelta è motivata sia dal fatto che nel modello entrano direttamente le forze di contatto interlaminari, sia dal fatto che un modello diretto di trave può risultare il più appropriato per strati di materiale composito.

Una configurazione è descritta per ciascuno strato dalla coppia di funzioni regolari

$$\mathbf{x}^{(i)} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \mathbf{d}^{(i)} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{V}. \quad (1)$$

La prima funzione è una parametrizzazione della linea d'asse, la seconda assegna ad ogni punto  $\mathbf{x}(s)$  l'assetto della sezione;  $\mathcal{I}$  è l'intervallo dei reali  $[0, L]$ ,  $\mathcal{E}$  è lo spazio euclideo di dimensione 2,  $\mathcal{V}$  è lo spazio vettoriale ad esso associato, visto come sottospazio di uno spazio  $\mathcal{U}$  di dimensione 3. Assumendo  $\|\mathbf{d}^{(i)}\| = 1$ , un atto di moto è descritto dalle funzioni

$$\mathbf{v}^{(i)} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \boldsymbol{\omega}^{(i)} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{V}^\perp. \quad (2)$$

La *potenza*  $W$  spesa in un atto di moto sia costituita dalla somma di una *potenza esterna*  $W_{out}$  e di una *potenza interna*  $W_{in}$ . Per una trave composta da  $N$  strati queste abbiano le seguenti rappresentazioni

$$\begin{aligned} W_{out} := & \sum_{i=1}^N \int_0^L (\mathbf{b}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(i)} + \mathbf{c}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)}) ds \\ & + \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{t}_0^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(i)}(0) + \mathbf{t}_L^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(i)}(L) + \mathbf{m}_0^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)}(0) + \mathbf{m}_L^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)}(L) \right), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{in} := & - \sum_{i=1}^N \int_0^L (\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(i)} + \mathbf{g}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)} + \mathbf{t}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(i)'} + \mathbf{m}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)'}) ds \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^L \boldsymbol{\tau}^{(i)} \cdot (\mathbf{v}_-^{(i+1)} - \mathbf{v}_+^{(i)}) ds \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \left( \boldsymbol{\tau}_0^{(i)} \cdot (\mathbf{v}_-^{(i+1)}(0) - \mathbf{v}_+^{(i)}(0)) + \boldsymbol{\tau}_L^{(i)} \cdot (\mathbf{v}_-^{(i+1)}(L) - \mathbf{v}_+^{(i)}(L)) \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Sono definite così le interazioni di volume  $\mathbf{b}^{(i)}$ ,  $\mathbf{c}^{(i)}$  e di contatto al bordo sinistro  $\mathbf{t}_0^{(i)}$ ,  $\mathbf{m}_0^{(i)}$  e al bordo destro  $\mathbf{t}_L^{(i)}$ ,  $\mathbf{m}_L^{(i)}$ . Con  $\mathbf{v}_-^{(i)}$  e  $\mathbf{v}_+^{(i)}$  si sono indicate le velocità corrispondenti a

$$\mathbf{x}_-^{(i)} := \mathbf{x}^{(i)} - \frac{1}{2} h^{(i)} \mathbf{d}^{(i)}, \quad \mathbf{x}_+^{(i)} := \mathbf{x}^{(i)} + \frac{1}{2} h^{(i)} \mathbf{d}^{(i)}. \quad (5)$$

da interpretare come posizioni dei punti del bordo inferiore e superiore dello strato  $i$ -esimo di spessore  $h^{(i)}$ . Dalla espressione di  $W_{in}$  risulta definito in modo naturale, oltre agli sforzi  $\mathbf{t}^{(i)}$  e  $\mathbf{m}^{(i)}$ , uno *sforzo interlaminare*  $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$ . Si noti che per  $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$  si è ammessa esplicitamente una parte singolare al bordo sinistro  $\boldsymbol{\tau}_0^{(i)}$  e

al bordo destro  $\boldsymbol{\tau}_L^{(i)}$ . Seguendo lo schema assiomatico proposto in [1], si assume che per ogni atto di moto sia

$$W_{out} + W_{in} = 0, \quad (6)$$

e che per ogni atto di moto rigido sia

$$W_{in} = 0. \quad (7)$$

Dall'assioma del bilancio della potenza (6) derivano le equazioni di bilancio locali

$$\mathbf{t}^{(i)'} + \boldsymbol{\tau}^{(i)} - \boldsymbol{\tau}^{(i-1)} - \mathbf{k}^{(i)} + \mathbf{b}^{(i)} = 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{m}^{(i)'} - \mathbf{g}^{(i)} + \frac{1}{2}h^{(i)}\mathbf{d}^{(i)} \times (\boldsymbol{\tau}^{(i)} + \boldsymbol{\tau}^{(i-1)}) + \mathbf{c}^{(i)} = 0 \quad (9)$$

assieme alle equazioni al bordo

$$\mathbf{t}^{(i)}(0) = -\mathbf{t}_0^{(i)} - (\boldsymbol{\tau}_0^{(i)} - \boldsymbol{\tau}_0^{(i-1)}), \quad (10)$$

$$\mathbf{t}^{(i)}(L) = \mathbf{t}_L^{(i)} + \boldsymbol{\tau}_L^{(i)} - \boldsymbol{\tau}_L^{(i-1)}, \quad (11)$$

$$\mathbf{m}^{(i)}(0) = -\mathbf{m}_0^{(i)} - \frac{1}{2}h^{(i)}\mathbf{d}^{(i)}(0) \times (\boldsymbol{\tau}_0^{(i)} + \boldsymbol{\tau}_0^{(i-1)}), \quad (12)$$

$$\mathbf{m}^{(i)}(L) = \mathbf{m}_L^{(i)} + \frac{1}{2}h^{(i)}\mathbf{d}^{(i)}(L) \times (\boldsymbol{\tau}_L^{(i)} + \boldsymbol{\tau}_L^{(i-1)}). \quad (13)$$

Si consideri la parte della trave multistrato costituita dallo strato  $i$ -esimo. La potenza esterna e la potenza interna hanno le espressioni

$$W_{out}^{(i)} := \int_0^L (\tilde{\mathbf{b}}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(i)} + \tilde{\mathbf{c}}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)}) ds + \tilde{\mathbf{t}}_0^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(i)}(0) + \tilde{\mathbf{t}}_L^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(i)}(L) + \tilde{\mathbf{m}}_0^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)}(0) + \tilde{\mathbf{m}}_L^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)}(L), \quad (14)$$

$$W_{in}^{(i)} := - \int_0^L (\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(i)} + \mathbf{g}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)} + \mathbf{t}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(i)'} + \mathbf{m}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)'}) ds, \quad (15)$$

essendo  $\tilde{\mathbf{b}}^{(i)}$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}^{(i)}$ ,  $\tilde{\mathbf{t}}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{t}}_L$ ,  $\tilde{\mathbf{m}}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{m}}_L$  le interazioni con l'esterno e con gli altri strati. Dall'assioma del bilancio della potenza (6) derivano le equazioni locali di bilancio

$$\mathbf{t}^{(i)'} - \mathbf{k}^{(i)} + \tilde{\mathbf{b}}^{(i)} = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{m}^{(i)'} - \mathbf{g}^{(i)} + \tilde{\mathbf{c}}^{(i)} = 0 \quad (17)$$

assieme alle equazioni al bordo sinistro e destro.

$$\mathbf{t}^{(i)}(0) = -\tilde{\mathbf{t}}_0^{(i)}, \quad \mathbf{t}^{(i)}(L) = \tilde{\mathbf{t}}_L^{(i)}, \quad (18)$$

$$\mathbf{m}^{(i)}(0) = -\tilde{\mathbf{m}}_0^{(i)}, \quad \mathbf{m}^{(i)}(L) = \tilde{\mathbf{m}}_L^{(i)}. \quad (19)$$

Dall'assioma di invarianza (7) derivano le condizioni di carattere costitutivo

$$\mathbf{k}^{(i)} = 0, \quad \mathbf{g}^{(i)} = -\mathbf{x}^{(i)'} \times \mathbf{t}^{(i)}, \quad (\mathbf{x}_+^{(i)} - \mathbf{x}_-^{(i+1)}) \times \boldsymbol{\tau}^{(i)} = 0, \quad (20)$$

assieme a condizioni al bordo per la parte singolare di  $\boldsymbol{\tau}$  nella forma della (20)<sub>3</sub>.

Equazioni corrispondenti possono essere ottenute per ogni altra parte costituita da più strati adiacenti. Da tali equazioni e dalle (8) e (9) risulta che le interazioni sullo strato  $i$ -esimo sono esprimibili come somma delle interazioni applicate dall'esterno della trave, definite dalla (3), e delle interazioni applicate dagli strati contigui (il segno '+' denota quelle applicate dallo strato superiore, il segno '-' quelle applicate dallo strato inferiore) essendo

$$\tilde{\mathbf{b}}^{(i)} = \mathbf{b}^{(i)} + \mathbf{b}_+^{(i)} + \mathbf{b}_-^{(i)}, \quad \tilde{\mathbf{c}}^{(i)} = \mathbf{c}^{(i)} + \mathbf{c}_+^{(i)} + \mathbf{c}_-^{(i)}, \quad (21)$$

$$\mathbf{b}_+^{(i)} = \boldsymbol{\tau}^{(i)}, \quad \mathbf{c}_+^{(i)} = \frac{1}{2}h^{(i)}\mathbf{d}^{(i)} \times \boldsymbol{\tau}^{(i)}, \quad (22)$$

$$\mathbf{b}_-^{(i)} = -\boldsymbol{\tau}^{(i-1)}, \quad \mathbf{c}_-^{(i)} = \frac{1}{2}h^{(i)}\mathbf{d}^{(i)} \times \boldsymbol{\tau}^{(i-1)}. \quad (23)$$

Una tale decomposizione si ha anche per le interazioni sul bordo sinistro e destro nelle (18) e (19). Si noti che le interazioni tra due strati contigui risultano descritte da forze opposte che possono essere interpretate come forze di contatto applicate sui bordi superiore e inferiore di ciascuno strato, corrispondenti allo sforzo interlaminare  $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$  che deve essere tale da soddisfare la (20)<sub>3</sub>. È poi interessante osservare come nelle equazioni di bilancio (8) e (9)  $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$  svolga un ruolo analogo a quello di  $\mathbf{t}^{(i)}$ , così che le equazioni alludono a quelle di un continuo bidimensionale.

È bene notare che finora non è stato assunto nessun vincolo tra gli strati e che in generale la interazione tra questi va assegnata attraverso una funzione costitutiva per ciascun  $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$ . Si assuma ora un vincolo di perfetta adesione tra gli strati tale che

$$\mathbf{x}_+^{(i)} = \mathbf{x}_-^{(i+1)}. \quad (24)$$

Questo implica che in ogni atto di moto è

$$\mathbf{v}_+^{(i)} - \mathbf{v}_-^{(i+1)} = 0. \quad (25)$$

Pertanto lo sforzo interlaminare non dà più alcun contributo alla potenza (4), risultando così puramente reattivo. Le parametrizzazioni  $\mathbf{x}^{(i)}$  possono essere espresse in termini di una qualsiasi di esse  $\mathbf{x}^{(r)}$ , per via della (24) e delle (5), come segue

$$\mathbf{x}^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{x}^{(r)} + \frac{1}{2}h^{(r)}\mathbf{d}^{(r)} + h^{(r+1)}\mathbf{d}^{(r+1)} + \dots + \frac{1}{2}h^{(i)}\mathbf{d}^{(i)} & i > r, \\ \mathbf{x}^{(r)} - \frac{1}{2}h^{(r)}\mathbf{d}^{(r)} - h^{(r-1)}\mathbf{d}^{(r-1)} - \dots - \frac{1}{2}h^{(i)}\mathbf{d}^{(i)} & i < r. \end{cases} \quad (26)$$

Introducendo le corrispondenti espressioni per  $\mathbf{v}^{(i)}$  nella (3) e nella (4), le equazioni locali di bilancio che ne derivano sono

$$\sum_{l=1}^N (\mathbf{t}^{(l)'} + \mathbf{b}^{(l)}) = 0, \quad (27)$$

$$\mathbf{m}^{(i)'} - \mathbf{g}^{(i)} + \frac{h^{(i)}}{2} \mathbf{d}^{(i)} \times \left( \sum_{l=i+1}^N (\mathbf{b}^{(l)} + \mathbf{t}^{(l)'}) - \sum_{l=1}^{i-1} (\mathbf{b}^{(l)} + \mathbf{t}^{(l)'}) \right) + \mathbf{c}^{(i)} = 0, \quad (28)$$

mentre le equazioni al contorno risultano

$$\sum_{l=1}^N (\mathbf{t}^{(l)}(0) + \mathbf{t}_0^{(l)}) = 0, \quad \sum_{l=1}^N (\mathbf{t}^{(l)}(L) - \mathbf{t}_L^{(l)}) = 0, \quad (29)$$

$$\mathbf{m}^{(i)}(0) = -\mathbf{m}_0^{(i)} - \frac{h^{(i)}}{2} \mathbf{d}^{(i)}(0) \times \left( \sum_{l=i+1}^N (\mathbf{t}^{(l)}(0) + \mathbf{t}_0^{(l)}) - \sum_{l=1}^{i-1} (\mathbf{t}^{(l)}(0) + \mathbf{t}_0^{(l)}) \right), \quad (30)$$

$$\mathbf{m}^{(i)}(L) = \mathbf{m}_L^{(i)} - \frac{h^{(i)}}{2} \mathbf{d}^{(i)}(L) \times \left( \sum_{l=i+1}^N (\mathbf{t}^{(l)}(L) - \mathbf{t}_L^{(l)}) - \sum_{l=1}^{i-1} (\mathbf{t}^{(l)}(L) - \mathbf{t}_L^{(l)}) \right). \quad (31)$$

Dalle equazioni (8), (10) e (11) si possono infine ottenere le seguenti espressioni per lo sforzo interlaminare

$$\boldsymbol{\tau}^{(i)} = - \sum_{l=1}^i (\mathbf{t}^{(l)'} + \mathbf{b}^{(l)}) = \sum_{l=i+1}^N (\mathbf{t}^{(l)'} + \mathbf{b}^{(l)}), \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\tau}_0^{(i)} = - \sum_{l=1}^i (\mathbf{t}^{(l)}(0) + \mathbf{t}_0^{(l)}) = \sum_{l=i+1}^N (\mathbf{t}^{(l)}(0) + \mathbf{t}_0^{(l)}), \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\tau}_L^{(i)} = - \sum_{l=1}^i (-\mathbf{t}^{(l)}(L) + \mathbf{t}_0^{(l)}) = \sum_{l=i+1}^N (-\mathbf{t}^{(l)}(L) + \mathbf{t}_0^{(l)}). \quad (34)$$

## 2. ESEMPIO APPLICATIVO

Come esempio di applicazione si considera una trave rettilinea composta da tre strati perfettamente aderenti, soggetta a una forza assiale unitaria applicata allo strato intermedio. Si dà la soluzione del problema lineare, avendo utilizzando la linearizzazione delle equazioni (27), (28) e delle corrispondenti

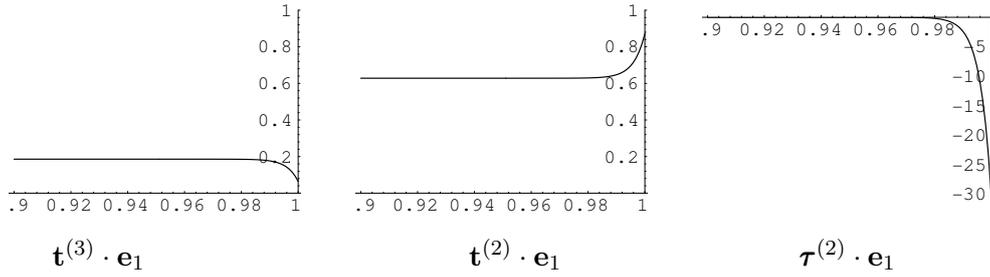


Figure 1: Sforzo normale e sforzo interlaminare tangenziale vicino  $s = L$ .

equazioni al bordo. Le funzioni costitutive lineari per  $\mathbf{t}^{(i)}$  e  $\mathbf{m}^{(i)}$  sono assegnate nella forma usuale attraverso le loro componenti

$$N^{(i)} = (EA)^{(i)}\varepsilon^{(i)}, \quad T^{(i)} = (GA)^{(i)}\gamma^{(i)}, \quad M^{(i)} = (EI)^{(i)}\chi^{(i)}. \quad (35)$$

Le rigidezze corrispondono agli spessori (in inch)  $h^{(1)} = h^{(3)} = 5 \times 10^{-3}$ ,  $h^{(2)} = 15 \times 10^{-3}$ , e ai moduli (in psi)  $E^{(1)} = E^{(3)} = 1.03 \times 10^7$ ,  $G^{(1)} = G^{(3)} = 0.386 \times 10^7$  (alluminio),  $E^{(2)} = 9.14 \times 10^6$ ,  $G^{(2)} = 3.57 \times 10^6$  (piezoelettrico). La lunghezza è  $L = 1$ . In Fig. 1 sono riportati i valori ottenuti per le componenti di  $\mathbf{t}^{(i)}$  e  $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$  nella direzione dell' asse, vicino al bordo destro dove  $s = L$ . Si noti che dalle (11) e (13) risulta

$$\boldsymbol{\tau}_L^{(2)} = -\mathbf{t}^{(3)}(L), \quad \frac{1}{2}h^{(3)}\mathbf{d}^{(3)} \times \boldsymbol{\tau}_L^{(2)} = \mathbf{m}^{(3)}(L). \quad (36)$$

## References

- [1] Di Carlo, A. (1994). Connection and (micro-)stress. *Euromech Colloquium on Microstructures and Phase Transitions in Solids*, Udine, 24 Maggio.
- [2] Epstein, M. and Glockner, P. G. (1981). Deep and multilayered beams. *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, 107, 1029–1037.
- [3] Ochoa, O. O. and Reddy, J. N. (1994). *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Kluwer.
- [4] Reddy, J. N. (1990). On refined theories of composite laminates. *Meccanica*, 25, 230–238.