Piccole oscillazioni nella trave di Eulero–Bernoulli con distribuzioni di forza singolari

Amabile Tatone

17 marzo 2002 – 30 giugno 2002 (22:10)

Sommario

Si tratta delle differenze tra diversi modi di descrivere il moto di una trave con distribuzioni di forza singolari. È esaminato prima il caso di una trave appoggiata con una forza in mezzeria dipendente dal tempo. In questo caso i modi naturali hanno una espressione esplicita rendendo più semplici i calcoli.

Si descrive la forza come un delta di Dirac e, in alternativa, si suddivide la trave in due tratti aggiungendo le condizioni di continuità in mezzeria. Si mostra che queste descrizioni sono equivalenti. Nel primo caso si descrive la soluzione come distribuzione non regolare, nel secondo caso la soluzione viene descritta per tratti regolari. Si mostra anche come la parte non regolare possa essere interpretata come "soluzione statica".

Sono scritte le equazioni del moto in termini di trasformate di Fourier rispetto al tempo. Sono definiti i modi naturali e, utilizzando questi come base, è calcolata la funzione di trasferimento.

Si mostra poi come nell'esprimere la funzione di trasferimento come composizione modale si possa scegliere di enucleare la parte non regolare oppure no. Il limite della differenza tra le due espressioni risulta nullo al tendere all'infinito del numero dei modi.

Viene poi esaminato il caso di una mensola con due coppie applicate e una massa eccentrica all'estremità. In questo caso la parte non regolare ha la derivata seconda non continua. Viene anche messo in evidenza quale siano il prodotto scalare e la norma indotti dalla presenza di una massa all'estremità.

L'esposizione è molto dettagliata e può sembrare prolissa. Ma questo testo è da considerare strumento di lavoro destinato alle attività che si svolgono nell'ambito della sperimentazione per il controllo delle oscillazioni con attuatori piezoelettrici. Non ci sono riferimenti esterni. Sono stati realizzati dei Notebook Mathematica per alcune esplorazioni preliminari, qualche calcolo e la visualizzazione.

Indice

Capitolo 1

Trave appoggiata con forzante in mezzeria

1.1 Equazioni di bilancio

Si considera il modello di trave di Eulero-Bernoulli applicato al caso di trave rettilinea. Per ogni atto di moto

$$\begin{aligned} &\int_0^L \big(Q' + p\big)\, w \, d\zeta + \int_0^L \big(M' + Q\big)\, w' \, d\zeta \\ &\quad + \big(Q^+ - Q(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- + Q(0)\big)\, w(0) \\ &\quad + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dalle integrazioni per parti

$$\int_0^L M'w' \, d\zeta = -\int_0^L M''w \, d\zeta + M'(L)w(L) - M'(0)w(0) \tag{1.2}$$

$$\int_0^L Qw' \, d\zeta = -\int_0^L Q'w \, d\zeta + Q(L)w(L) - Q(0)w(0) \tag{1.3}$$

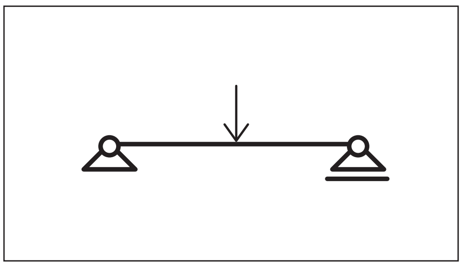

Figura 1.1: Trave appoggiata con forza in mezzeria

si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^L \big(-M''+p\big)\,w\,d\zeta + \big(Q^+ + M'(L)\big)\,w(L) + \big(Q^- - M'(0)\big)\,w(0)\\ + \big(M^+ - M(L)\big)\,w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\,w'(0) = 0\end{aligned} \tag{1.4}$$

Nel caso di una trave appoggiata è

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0 \tag{1.5}$$

Per atti di moto compatibili con i vincoli la (1.4) diventa

$$\int_0^L \big(-M''+p\big)\,w d\zeta + \big(M^+ - M(L)\big)\,w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\,w'(0) = 0 \tag{1.6}$$

Ne derivano le equazioni di bilancio

$$-M'' + p = 0 \tag{1.7}$$

con le condizioni al bordo

$$\begin{aligned} M^- + M(0) &= 0\\ M^+ - M(L) &= 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Definendo la funzione di risposta tale che

$$M(\zeta) = YJ\,v''(\zeta) \tag{1.9}$$

e ponendo

$$M^+ = 0, \quad M^- = 0 \tag{1.10}$$

alla (1.6) corrisponde

$$\int_0^L \big(YJ\,v'''' - p\big)\,w\,d\zeta + YJ\,v''(L)w'(L) - YJ\,v''(0)w'(0) = 0 \tag{1.11}$$

La (1.7) e le (1.8) diventano

$$YJ\,v'''' - p = 0 \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} v''(0) &= 0\\ v''(L) &= 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.2 Equazioni del moto

Ponendo

$$p := -\rho A\,\ddot{v} + f\,\delta(\zeta-\ell) \tag{1.14}$$

la (1.11) diventa

$$\begin{aligned}&\int_0^L \big(YJ\,v'''' + \rho A\,\ddot{v} - f\,\delta(\zeta-\ell)\big)\,w\,d\zeta\\ &\quad + YJ\,v''(L,t)w'(L) - YJ\,v''(0,t)w'(0) = 0\end{aligned} \tag{1.15}$$

con le condizioni al bordo

$$v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0 \tag{1.16}$$

Corrispondentemente la (1.12) diventa

$$YJ\,v''''(\zeta,t) + \rho A\,\ddot{v}(\zeta,t) - f(t)\,\delta(\zeta-\ell) = 0 \tag{1.17}$$

con le condizioni al bordo

$$\begin{aligned}v(0,t) = 0, &\quad v''(0,t) = 0\\ v(L,t) = 0, &\quad v''(L,t) = 0\end{aligned} \tag{1.18}$$

Le corrispondenti espressioni in termini di trasformate di Fourier sono

$$\begin{aligned}&\int_0^L \left(\mathrm{v}''''(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\,\mathrm{v}(\zeta,\omega) - F(\omega)\,\delta(\zeta-\ell)\right) w(\zeta)\,d\zeta\\ &+ \mathrm{v}''(L,\omega)w'(L) - \mathrm{v}''(0,\omega)w'(0) = 0\end{aligned} \tag{1.19}$$

con le condizioni al bordo

$$\mathrm{v}(0,\omega) = 0, \quad \mathrm{v}(L,\omega) = 0 \tag{1.20}$$

oppure

$$\mathrm{v}''''(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\,\mathrm{v}(\zeta,\omega) - F(\omega)\,\delta(\zeta-\ell) = 0 \tag{1.21}$$

con le condizioni al bordo

$$\mathrm{v}(0,\omega) = 0, \quad \mathrm{v}''(0,\omega) = 0 \tag{1.22}$$

$$\mathrm{v}(L,\omega) = 0, \quad \mathrm{v}''(L,\omega) = 0 \tag{1.23}$$

avendo posto

$$k^2 = \frac{YJ}{\rho A} \tag{1.24}$$

e avendo indicato con $\mathrm{v}(\zeta,\omega)$ e $F(\omega)$ le trasformate di Fourier di $v(\zeta,t)$ e $f(t)/YJ$.

1.3 Modi naturali

Si consideri l'equazione

$$\mathrm{v}''''(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\,\mathrm{v}(\zeta,\omega) = 0 \tag{1.25}$$

con le condizioni al bordo (1.22), (1.23). Riguardando tale equazione, per un valore fissato di ω, come una equazione differenziale in ζ, se ne consideri la forma normale

$$\mathbf{y}'(\zeta) = \mathbf{A}\mathbf{y}(\zeta) \tag{1.26}$$

con

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}(\omega,\zeta) \\ \mathrm{v}'(\omega,\zeta) \\ \mathrm{v}''(\omega,\zeta) \\ \mathrm{v}'''(\omega,\zeta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\omega^2}{k^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

La soluzione è

$$\mathbf{y}(\zeta) = e^{\mathbf{A}\zeta}\mathbf{y}_o \tag{1.28}$$

Per valutare l'esponenziale occorre ridurre la matrice $\mathbf{A}$ nella forma di Jordan. Gli autovalori si possono indicare con

$$\beta, \quad -\beta, \quad i\,\beta, \quad -i\,\beta \tag{1.29}$$

con $\beta > 0$ tale che

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{k^2} \tag{1.30}$$

Essendo gli autovalori distinti, la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. Disponendo gli autovettori per colonne

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} -1 & 1 & i & -i \\ \beta & \beta & -\beta & -\beta \\ -\beta^2 & \beta^2 & -i\,\beta^2 & i\,\beta^2 \\ \beta^3 & \beta^3 & \beta^3 & \beta^3 \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

si ha

$$e^{\mathbf{A}\zeta} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} e^{\beta\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\beta\zeta} \end{pmatrix} \mathbf{T} \tag{1.32}$$

La prima riga di questa matrice risulta

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2} & \frac{\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta} & \frac{-\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2\,\beta^2} & \frac{-\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta^3} \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

Pertanto la espressione di $\mathrm{v}(\zeta,\omega)$ è data dal prodotto di tale riga per $\mathbf{y}_o$, i cui elementi sono delle costanti arbitrarie

$$\begin{aligned}\mathrm{v}(\zeta,\omega) = c_1(\omega)\frac{\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2} + c_2(\omega)\frac{\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta} \\ + c_3(\omega)\frac{-\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2\,\beta^2} + c_4(\omega)\frac{-\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta^3}\end{aligned} \tag{1.34}$$

Essendo

$$\begin{aligned}\mathrm{v}''(\zeta,\omega) = c_1(\omega)\frac{\beta^2\,(-\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta))}{2} + c_2(\omega)\frac{\beta\,(-\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta))}{2} \\ + c_3(\omega)\frac{\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2} + c_4(\omega)\frac{\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta}\end{aligned} \tag{1.35}$$

le condizioni al bordo (1.22) implicano

$$c_1(\omega)=0, \quad c_3(\omega)=0 \tag{1.36}$$

Dalle condizioni al bordo (1.23) si ottiene il sistema di equazioni omogenee

$$\begin{pmatrix} \frac{\sin(L\,\beta)+\sinh(L\,\beta)}{2\,\beta} & \frac{-\sin(L\,\beta)+\sinh(L\,\beta)}{2\,\beta^3} \\ \frac{-\beta\,(\sin(L\,\beta)-\sinh(L\,\beta))}{2} & \frac{\sin(L\,\beta)+\sinh(L\,\beta)}{2\,\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2(\omega) \\ c_4(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

Il determinante della matrice risulta

$$\frac{\sin(L\,\beta)\sinh(L\,\beta)}{\beta^2} \tag{1.38}$$

Affinchè esista una soluzione non nulla deve essere

$$\sin(L\,\beta)=0 \tag{1.39}$$

Corrispondentemente si ha

$$c_4(\omega) = -\beta^2 c_2(\omega) \tag{1.40}$$

Pertanto, ponendo $c(\omega) = c_2(\omega)/\beta$ risulta

$$\mathrm{v}(\zeta,\omega) = c(\omega)\,\sin(\beta\zeta) \tag{1.41}$$

Poichè

$$\sin(L\,\beta)=0, \quad \beta>0 \quad \Rightarrow \quad \beta = n\frac{\pi}{L} \tag{1.42}$$

dalla (1.30) discende

$$\frac{\omega}{k} = \pm\beta^2 = \pm n^2\,\frac{\pi^2}{L^2} \tag{1.43}$$

Ponendo

$$\omega_n := n^2 \frac{\pi^2}{L^2} k \tag{1.44}$$

alla funzione $c(\omega)$ si può dare l'espressione

$$c(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(c(\omega_n)\delta(\omega - \omega_n) + c(-\omega_n)\delta(\omega + \omega_n)\big) \tag{1.45}$$

ottenendo infine per la (1.41) la forma

$$\mathrm{v}(\zeta, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\frac{\omega_n}{k}}\,\zeta\right) \big(c(\omega_n)\delta(\omega - \omega_n) + c(-\omega_n)\delta(\omega + \omega_n)\big) \tag{1.46}$$

La trasformata inversa di Fourier della (1.46) risulta

$$\begin{aligned} v(\zeta, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{v}(\zeta, \omega)\, e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin\left(\sqrt{\frac{\omega_n}{k}}\,\zeta\right) \big(c(\omega_n)(\cos(\omega_n t) - i\sin(\omega_n t)) \\ &\qquad + c(-\omega_n)(\cos(\omega_n t) + i\sin(\omega_n t))\big) \end{aligned} \tag{1.47}$$

Riorganizzando i coefficienti la espressione precedente diventa

$$v(\zeta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\frac{\omega_n}{k}}\,\zeta\right) \big(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\big) \tag{1.48}$$

Questa è la descrizione del moto corrispondente alle equazioni (1.25), (1.22), (1.23). Tale descrizione è stata ottenuta attraverso una selezione, indotta dalla condizioni al bordo, delle funzioni $e^{-i\omega t}$ utilizzate nella trasformata di Fourier.

Si dicono *modi naturali* le funzioni

$$\phi_n(\zeta) := \sin\left(\sqrt{\frac{\omega_n}{k}}\,\zeta\right) \tag{1.49}$$

Queste soddisfano la (1.25) con $\omega = \omega_n$. Ponendo

$$\beta_n := \sqrt{\frac{\omega_n}{k}} \tag{1.50}$$

si ha pertanto

$$\phi_n''''(\zeta) = \beta_n^4\, \phi_n(\zeta) \tag{1.51}$$

Si osservi che la (1.25) equivale alla condizione che per qualsiasi w sia

$$\int_0^L \big(\mathrm{v}''''(\zeta, \omega) - \beta^4\, \mathrm{v}(\zeta, \omega)\big)\, w\, d\zeta = 0 \tag{1.52}$$

Per funzioni w che soddisfino le condizioni al bordo (1.22) e (1.23) risulta, attraverso ripetute integrazioni per parti,

$$\int_0^L \mathrm{v}'''' w \, d\zeta = \int_0^L w'''' \mathrm{v} \, d\zeta \tag{1.53}$$

Ne deriva che

$$\int_0^L \left(\phi_i'''' - \beta_i^4 \, \phi_i\right) \phi_j \, d\zeta = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^L \left(\phi_j'''' - \beta_i^4 \, \phi_j\right) \phi_i \, d\zeta = 0 \tag{1.54}$$

Sottraendo

$$\int_0^L \left(\phi_j'''' - \beta_j^4 \, \phi_j\right) \phi_i \, d\zeta = 0 \tag{1.55}$$

si ottiene

$$\left(\beta_j^4 - \beta_i^4\right) \int_0^L \phi_j \phi_i \, d\zeta = 0 \tag{1.56}$$

Questa è la proprietà di ortogonalità dei modi.

1.4 Parte singolare della soluzione

Nel caso in cui

$$p(\zeta) := f \, \delta(\zeta - \ell) \tag{1.57}$$

la (1.12) diventa

$$YJ v''''(\zeta) - f \, \delta(\zeta - \ell) = 0 \tag{1.58}$$

Integrando si ottiene

$$v''''(\zeta) = \frac{f}{YJ} \, \delta(\zeta - \ell) \tag{1.59}$$

$$v'''(\zeta) = \frac{f}{YJ} \Big(\mathfrak{h}(\zeta - \ell) + c_1\Big) \tag{1.60}$$

$$v''(\zeta) = \frac{f}{YJ} \Big((\zeta - \ell)\mathfrak{h}(\zeta - \ell) + c_1 \zeta + L c_2\Big) \tag{1.61}$$

$$v'(\zeta) = \frac{f}{YJ} \left(\frac{1}{2}(\zeta - \ell)^2 \mathfrak{h}(\zeta - \ell) + \frac{c_1}{2}\zeta^2 + L c_2 \zeta\right) \tag{1.62}$$

$$v(\zeta) = \frac{f}{YJ} \left(\frac{1}{6}(\zeta - \ell)^3 \mathfrak{h}(\zeta - \ell) + \frac{c_1}{6}\zeta^3 + \frac{L c_2}{2}\zeta^2 + L^2 c_3 \zeta + L^3 c_4\right) \tag{1.63}$$

avendo indicato con $\mathfrak{h}$ la funzione di Heaviside. Le condizioni al bordo (1.18) forniscono

$$c_1 = -\frac{L - \ell}{L}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{\ell \, (2 \, L - \ell)(L - \ell)}{6 \, L^3}, \quad c_4 = 0 \tag{1.64}$$

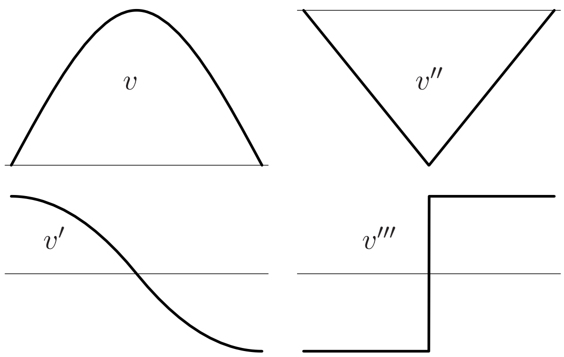

Figura 1.2: Soluzione statica

Risulta dunque

$$v(\zeta) = \frac{f}{YJ}\left(\frac{1}{6}(\zeta-\ell)^3\,\mathfrak{h}(\zeta-\ell) - \frac{\zeta}{6\,L}\,(L-\ell)(\ell^2 - 2\,\ell\,L + \zeta^2)\right) \tag{1.65}$$

da cui si può definire la funzione

$$\psi(\zeta) := \frac{1}{6}(\zeta-\ell)^3\,\mathfrak{h}(\zeta-\ell) - \frac{\zeta}{6\,L}\,(L-\ell)(\ell^2 - 2\,\ell\,L + \zeta^2) \tag{1.66}$$

1.5 Funzione di trasferimento

Definendo

$$\bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega) := F(\omega)\psi(\zeta) \tag{1.67}$$

si ponga

$$\mathrm{v}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega)\phi_i(\zeta) + \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega) \tag{1.68}$$

In questo modo si descrive la parte regolare di $\mathrm{v}(\zeta,\omega)$

$$\mathrm{v}(\zeta,\omega) - \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega) \tag{1.69}$$

come "combinazione lineare" dei modi. Si noti che sia $\bar{\mathrm{v}}$ che i modi ϕ_i soddisfano le condizioni (omogenee) al bordo (1.18).

Sostituendo la espressione (1.68) nella (1.19) con $w = \phi_j$ si ottiene

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N} q_i(\omega)\int_0^L \big(\phi_i''''(\zeta) - \beta^4\phi_i(\zeta)\big)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta \\ &\quad + \int_0^L \big(-F(\omega)\delta(\zeta-\ell) + \bar{\mathrm{v}}''''(\zeta,\omega) - \beta^4\,\bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\big)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta = 0\end{aligned} \tag{1.70}$$

Per la (1.51) si ha

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \int_0^L \left(\beta_i^4 - \beta^4\right) \phi_i(\zeta)\phi_j(\zeta)\, d\zeta \\ &\quad + \int_0^L \left(-F(\omega)\delta(\zeta-\ell) + \bar{\mathrm{v}}''''(\zeta,\omega) - \beta^4\, \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\right) \phi_j(\zeta)\, d\zeta = 0\end{aligned} \tag{1.71}$$

Per la (1.56)

$$\begin{aligned}&q_j(\omega) \left(\beta_j^4 - \beta^4\right) \int_0^L \phi_j(\zeta)^2\, d\zeta \\ &\quad + \int_0^L \left(-F(\omega)\delta(\zeta-\ell) + \bar{\mathrm{v}}''''(\zeta,\omega) - \beta^4\, \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\right) \phi_j(\zeta)\, d\zeta = 0\end{aligned} \tag{1.72}$$

Per la (1.58) è

$$\bar{\mathrm{v}}''''(\zeta,\omega) = F(\omega)\delta(\zeta-\ell) \tag{1.73}$$

Pertanto

$$q_j(\omega) \left(\beta_j^4 - \beta^4\right) \int_0^L \phi_j(\zeta)^2\, d\zeta - \beta^4 \int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\phi_j(\zeta)\, d\zeta = 0 \tag{1.74}$$

Inoltre dalla (1.73), integrando per parti e utilizzando le condizioni al bordo, si ha

$$F(\omega) \int_0^L \delta(\zeta-\ell)\phi_j(\zeta)\, d\zeta = \int_0^L \bar{\mathrm{v}}''''(\zeta,\omega)\phi_j(\zeta)\, d\zeta = \int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\phi_j''''(\zeta)\, d\zeta \tag{1.75}$$

Per la (1.51) è dunque

$$F(\omega) \int_0^L \delta(\zeta-\ell)\phi_j(\zeta)\, d\zeta = \beta_j^4 \int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\phi_j(\zeta)\, d\zeta \tag{1.76}$$

La (1.74) diventa pertanto

$$q_j(\omega) \left(\beta_j^4 - \beta^4\right) \int_0^L \phi_j(\zeta)^2\, d\zeta = \frac{\beta^4}{\beta_j^4}\, F(\omega)\, \phi_j(\ell) \tag{1.77}$$

Ponendo

$$\mu_j := \frac{1}{k^2} \int_0^L \phi_j(\zeta)^2\, d\zeta \tag{1.78}$$

la (1.77) si scrive

$$q_j(\omega) \left(\omega_j^2 - \omega^2\right) \mu_j = \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\, F(\omega)\, \phi_j(\ell) \tag{1.79}$$

da cui si ottiene

$$\boxed{q_j(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_j^2(\omega_j^2 - \omega^2)\mu_j}\, F(\omega)\, \phi_j(\ell)} \tag{1.80}$$

Sostituendo questa espressione nella (1.68) si ottiene

$$\mathrm{v}(\zeta, \omega) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\omega^2}{\omega_i^2 \left(\omega_i^2 - \omega^2\right) \mu_i}\, \phi_i(\ell)\phi_i(\zeta) + \psi(\zeta) \right) F(\omega) \tag{1.81}$$

La funzione di trasferimento risulta dunque

$$\boxed{H(\zeta, \omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega^2}{\omega_i^2 \left(\omega_i^2 - \omega^2\right) \mu_i}\, \phi_i(\ell)\phi_i(\zeta) + \psi(\zeta)} \tag{1.82}$$

Se si utilizza per $\mathrm{v}(\zeta, \omega)$, invece della espressione (1.68), la espressione

$$\breve{\mathrm{v}}(\zeta, \omega) = \sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega)\phi_i(\zeta) \tag{1.83}$$

si ottiene

$$\boxed{\breve{q}_j(\omega) = \frac{1}{(\omega_j^2 - \omega^2)\mu_j}\, F(\omega)\, \phi_j(\ell)} \tag{1.84}$$

e corrispondentemente

$$\breve{\mathrm{v}}(\zeta, \omega) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(\omega_i^2 - \omega^2\right) \mu_i}\, \phi_i(\ell)\phi_i(\zeta) \right) F(\omega) \tag{1.85}$$

La funzione di trasferimento risulta in questo caso

$$\boxed{\breve{H}(\zeta, \omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(\omega_i^2 - \omega^2\right) \mu_i}\, \phi_i(\ell)\phi_i(\zeta)} \tag{1.86}$$

La differenza tra le due espressioni della funzione di trasferimento è

$$H(\zeta, \omega) - \breve{H}(\zeta, \omega) = \psi(\zeta) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\phi_i(\ell)}{\omega_i^2 \mu_i}\, \phi_i(\zeta) \tag{1.87}$$

È interessante interpretarne il significato. Si noti che la (1.76) implica

$$\int_0^L \delta(\zeta - \ell)\phi_j(\zeta)\, d\zeta = \beta_j^4 \int_0^L \psi(\zeta)\phi_j(\zeta)\, d\zeta \tag{1.88}$$

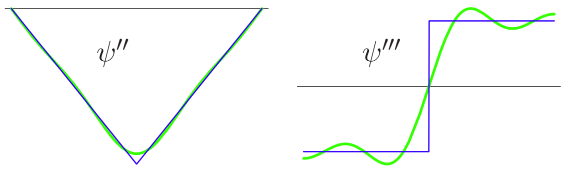

Figura 1.3: Approssimazione regolare della soluzione statica con 5 modi

$$\int_0^L \psi(\zeta)\phi_j(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{\beta_j^4}\int_0^L \delta(\zeta-\ell)\phi_j(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{\beta_j^4}\phi_j(\ell) \tag{1.89}$$

Poichè per la ortogonalità dei modi

$$\psi(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\int_0^L \psi(\zeta)\phi_i(\zeta)\,d\zeta}{\int_0^L \phi_i(\zeta)^2\,d\zeta}\right)\phi_i(\zeta) \tag{1.90}$$

risulta

$$\psi(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(\ell)}{\beta_i^4\int_0^L \phi_i(\zeta)^2\,d\zeta}\,\phi_i(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(\ell)}{\omega_i^2\,\mu_i}\,\phi_i(\zeta) \tag{1.91}$$

Pertanto dalla (1.87) si ha

$$H(\zeta,\omega) - \breve{H}(\zeta,\omega) = \sum_{i=N}^{\infty}\frac{\phi_i(\ell)}{\omega_i^2\mu_i}\,\phi_i(\zeta) \tag{1.92}$$

La differenza tra le funzioni di trasferimento consiste dunque nel resto della serie (1.91) troncata ai primi N termini. Si noti che tale differenza non dipende da ω. È anche utile rilevare che, dal confronto della (1.80) con la (1.84), risulta

$$q_j(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\,\breve{q}_j(\omega) \tag{1.93}$$

In Fig. 1.3 è riportato il grafico di $\psi(\zeta)$ assieme al grafico della espressione data dalla serie (1.91) troncata ai primi 5 termini.

1.6 Descrizione a tratti

Riguardando la trave come formata da due travi distinte, dalla (1.1) si ottiene per integrazione per parti, invece della (1.4),

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell \left(-M''_{[1]} + p_{[1]}\right) w_{[1]}\, d\zeta + \int_\ell^L \left(-M''_{[2]} + p_{[2]}\right) w_{[2]}\, d\zeta \\
&\quad + \left(Q^-_{[1]} - M'_{[1]}(0)\right) w_{[1]}(0) + \left(Q^+_{[1]} + M'_{[1]}(\ell)\right) w_{[1]}(\ell) \\
&\quad + \left(Q^-_{[2]} - M'_{[2]}(\ell)\right) w_{[2]}(\ell) + \left(Q^+_{[2]} + M'_{[2]}(L)\right) w_{[2]}(L) \\
&\quad + \left(M^-_{[1]} + M_{[1]}(0)\right) w'_{[1]}(0) + \left(M^+_{[1]} - M_{[1]}(\ell)\right) w'_{[1]}(\ell) \\
&\quad + \left(M^-_{[2]} + M_{[2]}(\ell)\right) w'_{[2]}(\ell) + \left(M^+_{[2]} - M_{[2]}(L)\right) w'_{[2]}(L) = 0
\end{aligned} \tag{1.94}$$

Le condizioni al bordo e le condizioni di collegamento dei due tratti sono

$$\begin{aligned}
v_{[1]}(0) &= 0 \\
v_{[1]}(\ell) &= v_{[2]}(\ell) \\
v'_{[1]}(\ell) &= v'_{[2]}(\ell) \\
v_{[2]}(L) &= 0
\end{aligned} \tag{1.95}$$

Per atti di moto compatibili con le (1.95), la (1.94) si trasforma nella

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell \left(-M''_{[1]} + p_{[1]}\right) w_{[1]}\, d\zeta + \int_\ell^L \left(-M''_{[2]} + p_{[2]}\right) w_{[2]}\, d\zeta \\
&\quad + \left(Q^+_{[1]} + Q^-_{[2]} + M'_{[1]}(\ell) - M'_{[2]}(\ell)\right) w_{[2]}(\ell) \\
&\quad + \left(M^+_{[1]} + M^-_{[2]} - M_{[1]}(\ell) + M_{[2]}(\ell)\right) w'_{[2]}(\ell) \\
&\quad + \left(M^-_{[1]} + M_{[1]}(0)\right) w'_{[1]}(0) + \left(M^+_{[2]} - M_{[2]}(L)\right) w'_{[2]}(L) = 0
\end{aligned} \tag{1.96}$$

Assegnando

$$\begin{aligned}
M^-_{[1]} &:= 0 \\
M^+_{[2]} &:= 0 \\
M^+_{[1]} + M^-_{[2]} &:= 0 \\
Q^+_{[1]} + Q^-_{[2]} &:= f
\end{aligned} \tag{1.97}$$

la (1.96) diventa

$$\begin{aligned}&\int_0^\ell \left(-M''_{[1]} + p_{[1]}\right) w_{[1]}\, d\zeta + \int_\ell^L \left(-M''_{[2]} + p_{[2]}\right) w_{[2]}\, d\zeta\\&\quad + \left(f + M'_{[1]}(\ell) - M'_{[2]}(\ell)\right) w_{[2]}(\ell) + M_{[1]}(0) w'_{[1]}(0)\\&\quad + \left(-M_{[1]}(\ell) + M_{[2]}(\ell)\right) w'_{[2]}(\ell) - M_{[2]}(L) w'_{[2]}(L) = 0\end{aligned} \tag{1.98}$$

Utilizzando la funzione di risposta (1.9) si ha infine

$$\begin{aligned}&\int_0^\ell \left(YJ\, v''''_{[1]} - p_{[1]}\right) w_{[1]}\, d\zeta + \int_\ell^L \left(YJ\, v''''_{[2]} - p_{[2]}\right) w_{[2]}\, d\zeta\\&+ \Big(YJ \left(v'''_{[2]}(\ell) - v'''_{[1]}(\ell)\right) - f\Big) w_{[2]}(\ell) - YJ\, v''_{[1]}(0) w'_{[1]}(0)\\&- YJ \left(v''_{[2]}(\ell) - v''_{[1]}(\ell)\right) w'_{[2]}(\ell) + YJ\, v''_{[2]}(L) w'_{[2]}(L) = 0\end{aligned} \tag{1.99}$$

La condizione che tale espressione sia nulla per qualsiasi atto di moto compatibile con le condizioni al bordo, è equivalente alle due equazioni differenziali

$$YJ\, v''''_{[1]}(\zeta) - p_{[1]} = 0, \qquad 0 \le \zeta \le \ell \tag{1.100}$$

$$YJ\, v''''_{[2]}(\zeta) - p_{[2]} = 0, \qquad \ell \le \zeta \le L \tag{1.101}$$

con le condizioni al bordo (1.95) e

$$\begin{aligned}v''_{[1]}(0) &= 0\\YJ\left(v'''_{[2]}(\ell) - v'''_{[1]}(\ell)\right) - f &= 0\\v''_{[2]}(\ell) - v''_{[1]}(\ell) &= 0\\v''_{[2]}(L) &= 0\end{aligned} \tag{1.102}$$

Si osservi che nella (1.99), indicando con $\widetilde{v}$ la parte regolare di v, si possono riorganizzare i termini nel modo seguente

$$\begin{aligned}&\int_0^L \widetilde{v}'''' w\, d\zeta + \left(v'''_{[2]}(\ell) - v'''_{[1]}(\ell)\right) w_{[2]}(\ell) - \frac{f}{YJ} w_{[2]}(\ell)\\&+ \left(v''_{[1]}(\ell) - v''_{[2]}(\ell)\right) w'_{[2]}(\ell) - v''_{[1]}(0) w'_{[1]}(0) + v''_{[2]}(L) w'_{[2]}(L) = 0\end{aligned} \tag{1.103}$$

e anche

$$\begin{aligned}&\int_0^L \left(\widetilde{v}'''' + \left(v'''_{[2]}(\ell) - v'''_{[1]}(\ell)\right) \delta(\zeta - \ell) - \frac{f}{YJ}\, \delta(\zeta - \ell)\right) w\, d\zeta\\&+ \left(v''_{[1]}(\ell) - v''_{[2]}(\ell)\right) w'_{[2]}(\ell) - v''_{[1]}(0) w'_{[1]}(0) + v''_{[2]}(L) w'_{[2]}(L) = 0\end{aligned} \tag{1.104}$$

Si mette così in evidenza che alla derivata quarta della parte regolare di v si somma il salto nella derivata terza.

1.7 Descrizione a tratti e regolarizzazione

Si descrive qui come arrivare alla (1.98) direttamente dalla (1.4). Invece di riguardare la trave come costituita da due travi distinte unite tra loro, si può più semplicemente suddividere l'intervallo $[0, L]$ in due parti. Non è però corretto esprimere l'integrale su $[0, L]$ nella (1.4) come somma degli integrali su ciascuna parte ma occorre procedere nel modo seguente. Si assuma per M la seguente decomposizione

$$M(\zeta) = \widetilde{M}(\zeta) + [\![M]\!]_\ell\, \mathfrak{h}(\zeta - \ell) + [\![M']\!]_\ell\, (\zeta - \ell)\mathfrak{h}(\zeta - \ell) \tag{1.105}$$

essendo $[\![M]\!]_\ell$ e $[\![M']\!]_\ell$ due costanti e $\widetilde{M}$ una funzione continua con derivata prima continua in ℓ e perciò tale che[1]

$$\int_0^L \widetilde{M}''\, w\, d\zeta = \int_0^\ell \widetilde{M}''\, w\, d\zeta + \int_\ell^L \widetilde{M}''\, w\, d\zeta \tag{1.106}$$

Dalla (1.105) si ha

$$M'(\zeta) = \widetilde{M}'(\zeta) + [\![M]\!]_\ell\, \delta(\zeta - \ell) + [\![M']\!]_\ell\, \mathfrak{h}(\zeta - \ell) \tag{1.107}$$

$$M''(\zeta) = \widetilde{M}''(\zeta) + [\![M]\!]_\ell\, \delta'(\zeta - \ell) + [\![M']\!]_\ell\, \delta(\zeta - \ell) \tag{1.108}$$

Sostituendo la (1.108) nella (1.4)

$$\int_0^L \big(-M'' + p\big)\, w\, d\zeta + \big(Q^+ + M'(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- - M'(0)\big)\, w(0) + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0$$

si ottiene

$$\begin{aligned} -\int_0^L \Big(\widetilde{M}'' + [\![M]\!]_\ell\, \delta'(\zeta - \ell) + [\![M']\!]_\ell\, \delta(\zeta - \ell)\Big)\, w\, d\zeta + \int_0^L p\, w\, d\zeta \\ + \big(Q^+ + M'(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- - M'(0)\big)\, w(0) \\ + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0 \end{aligned} \tag{1.109}$$

che diventa

$$\begin{aligned} -\int_0^L \widetilde{M}''\, w\, d\zeta + [\![M]\!]_\ell\, w'(\ell) - [\![M']\!]_\ell\, w(\ell) + \int_0^L p\, w\, d\zeta \\ + \big(Q^+ + M'(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- - M'(0)\big)\, w(0) \\ + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0 \end{aligned} \tag{1.110}$$

[1] Si dovrebbe dire: M' sia una funzione a variazione limitata ($M' \in \mathrm{BV}([0, L])$); esiste allora una sua decomposizione nella somma di una funzione assolutamente continua e di una funzione singolare [A. Tesei, Istituzioni di Analisi Superiore, Boringhieri, 1997, Teorema 10.4.6, p. 325].

Sostituendo la (1.106) si ottiene

$$
\begin{aligned}
-\int_0^\ell \widetilde{M}''\, w\, d\zeta - \int_\ell^L \widetilde{M}''\, w\, d\zeta + [\![M]\!]_\ell\, w'(\ell) - [\![M']\!]_\ell\, w(\ell) + \int_0^L p\, w\, d\zeta \\
+ \big(Q^+ + M'(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- - M'(0)\big)\, w(0) \\
+ \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0
\end{aligned}
\tag{1.111}
$$

Si assuma ora per p la seguente decomposizione

$$
p(\zeta) = \widetilde{p}(\zeta) + f\, \delta(\zeta - \ell) \tag{1.112}
$$

che assicuri

$$
\int_0^L \widetilde{p}\, w\, d\zeta = \int_0^\ell \widetilde{p}\, w\, d\zeta + \int_\ell^L \widetilde{p}\, w\, d\zeta \tag{1.113}
$$

Dalla (1.111) si ha

$$
\begin{aligned}
\int_0^\ell \Big(-\widetilde{M}'' + \widetilde{p}\Big)\, w\, d\zeta + \int_\ell^L \Big(-\widetilde{M}'' + \widetilde{p}\Big)\, w\, d\zeta \\
+ \big(f - [\![M']\!]_\ell\big)\ w(\ell) + [\![M]\!]_\ell\, w'(\ell) \\
+ \big(Q^+ + M'(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- - M'(0)\big)\, w(0) \\
+ \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0
\end{aligned}
\tag{1.114}
$$

Per atti di moto compatibili con i vincoli (1.5) e per le (1.10) , la (1.114) diventa

$$
\begin{aligned}
\int_0^\ell \Big(-\widetilde{M}'' + \widetilde{p}\Big)\, w\, d\zeta + \int_\ell^L \Big(-\widetilde{M}'' + \widetilde{p}\Big)\, w\, d\zeta \\
+ \big(f - [\![M']\!]_\ell\big)\ w(\ell) + [\![M]\!]_\ell\, w'(\ell) \\
- M(L)\, w'(L) + M(0)\, w'(0) = 0
\end{aligned}
\tag{1.115}
$$

Ne discende l'equazione di bilancio

$$
-\widetilde{M}'' + \widetilde{p} = 0 \tag{1.116}
$$

assieme alle

$$
\begin{aligned}
[\![M']\!]_\ell &= f \\
[\![M]\!]_\ell &= 0 \\
\widetilde{M}(L) + [\![M]\!]_\ell + [\![M']\!]_\ell (L - \ell) &= 0 \\
\widetilde{M}(0) &= 0
\end{aligned}
\tag{1.117}
$$

avendo espresso $M(L)$ e $M(0)$ attraverso la (1.105). Alla decomposizione (1.105) corrisponde, attraverso la funzione di risposta (1.9), la decomposizione di v

$$v(\zeta) = \widetilde{v}(\zeta) + \frac{1}{YJ}\left(\frac{1}{2}[\![M]\!]_\ell(\zeta-\ell)^2 + \frac{1}{6}[\![M']\!]_\ell(\zeta-\ell)^3\right)\mathfrak{h}(\zeta-\ell) \tag{1.118}$$

risultando $\widetilde{M} = YJ\,\widetilde{v}''$. Si ottiene pertanto, dalle (1.116) e (1.117),

$$\boxed{YJ\,\widetilde{v}'''' - \widetilde{p} = 0} \tag{1.119}$$

e le condizioni

$$\boxed{\begin{aligned} [\![M']\!]_\ell &= f \\ [\![M]\!]_\ell &= 0 \\ YJ\,\widetilde{v}''(L) + [\![M]\!]_\ell + [\![M']\!]_\ell(L-\ell) &= 0 \\ YJ\,\widetilde{v}''(0) &= 0 \end{aligned}} \tag{1.120}$$

a cui vanno aggiunte le (1.5).

Si noti infine che, definendo su ciascuno degli intervalli $[0,\ell]$ e $[\ell,L]$

$$\begin{aligned} M_{[1]}(\zeta) &:= \widetilde{M}(\zeta) \\ M_{[2]}(\zeta) &:= \widetilde{M}(\zeta) + [\![M]\!]_\ell + [\![M']\!]_\ell(\zeta-\ell) \end{aligned} \tag{1.121}$$

si ha, per la continuità di $\widetilde{M}$ e $\widetilde{M}'$ in ℓ,

$$\begin{aligned} [\![M]\!]_\ell &= M_{[2]}(\ell) - M_{[1]}(\ell) \\ [\![M']\!]_\ell &= M'_{[2]}(\ell) - M'_{[1]}(\ell) \end{aligned} \tag{1.122}$$

Poichè si ha anche

$$\begin{aligned} M(0) &= M_{[1]}(0) \\ M(L) &= M_{[2]}(L) \end{aligned} \tag{1.123}$$

ponendo

$$\begin{aligned} p_{[1]}(\zeta) &:= \widetilde{p}(\zeta), \qquad 0 \le \zeta \le \ell \\ p_{[2]}(\zeta) &:= \widetilde{p}(\zeta), \qquad \ell \le \zeta \le L \end{aligned} \tag{1.124}$$

dalla (1.115) si ottiene la (1.98).

Si possono inoltre definire su ciascuno degli intervalli $[0,\ell]$ e $[\ell,L]$

$$\begin{aligned} v_{[1]}(\zeta) &:= \widetilde{v}(\zeta) \\ v_{[2]}(\zeta) &:= \widetilde{v}(\zeta) + \frac{1}{YJ}\left(\frac{1}{2}[\![M]\!]_\ell(\zeta-\ell)^2 + \frac{1}{6}[\![M']\!]_\ell(\zeta-\ell)^3\right) \end{aligned} \tag{1.125}$$

risultando

$$
\begin{aligned}
YJ\, v''_{[1]}(\zeta) &= M_{[1]}(\zeta) \\
YJ\, v''_{[2]}(\zeta) &= M_{[2]}(\zeta)
\end{aligned}
\tag{1.126}
$$

1.8 Equazioni del moto a tratti

Ponendo

$$
p_{[1]} := -\rho A\, \ddot{v}_{[1]}, \quad p_{[2]} := -\rho A\, \ddot{v}_{[2]} \tag{1.127}
$$

la (1.99) diventa

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\ell \left(YJ\, v''''_{[1]} + \rho A\, \ddot{v}_{[1]}\right) w_{[1]}\, d\zeta + \int_\ell^L \left(YJ\, v''''_{[2]} + \rho A\, \ddot{v}_{[2]}\right) w_{[2]}\, d\zeta \\
&\quad - YJ\, v''_{[1]}(0,t) w'_{[1]}(0) \\
&\quad + \left(YJ\left(v'''_{[2]}(\ell,t) - v'''_{[1]}(\ell,t)\right) - f(t)\right) w_{[2]}(\ell) \\
&\quad - YJ\left(v''_{[2]}(\ell,t) - v''_{[1]}(\ell,t)\right) w'_{[2]}(\ell) \\
&\quad + YJ\, v''_{[2]}(L,t) w'_{[2]}(L) = 0
\end{aligned}
\tag{1.128}
$$

Corrispondentemente le (1.100) e (1.101) diventano

$$
YJ\, v''''_{[1]}(\zeta,t) + \rho A\, \ddot{v}_{[1]}(\zeta,t) = 0, \qquad 0 \le \zeta \le \ell \tag{1.129}
$$

$$
YJ\, v''''_{[2]}(\zeta,t) + \rho A\, \ddot{v}_{[2]}(\zeta,t) = 0, \qquad \ell \le \zeta \le L \tag{1.130}
$$

con le condizioni al bordo

$$
\begin{aligned}
v''_{[1]}(0,t) &= 0 \\
YJ\left(v'''_{[2]}(\ell,t) - v'''_{[1]}(\ell,t)\right) - f(t) &= 0 \\
v''_{[2]}(\ell,t) - v''_{[1]}(\ell,t) &= 0 \\
v''_{[2]}(L,t) &= 0
\end{aligned}
\tag{1.131}
$$

Le corrispondenti espressioni in termini di trasformate di Fourier sono

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\ell \left(\mathrm{v}''''_{[1]} - \frac{\omega^2}{k^2}\mathrm{v}_{[1]}\right) w_{[1]}\, d\zeta + \int_\ell^L \left(\mathrm{v}''''_{[2]} - \frac{\omega^2}{k^2}\mathrm{v}_{[2]}\right) w_{[2]}\, d\zeta \\
&\quad - \mathrm{v}''_{[1]}(0,\omega) w'_{[1]}(0) \\
&\quad + \left(\mathrm{v}'''_{[2]}(\ell,\omega) - \mathrm{v}'''_{[1]}(\ell,\omega) - F(\omega)\right) w_{[2]}(\ell) \\
&\quad - \left(\mathrm{v}''_{[2]}(\ell,\omega) - \mathrm{v}''_{[1]}(\ell,\omega)\right) w'_{[2]}(\ell) \\
&\quad + \mathrm{v}''_{[2]}(L,\omega) w'_{[2]}(L) = 0
\end{aligned}
\tag{1.132}
$$

oppure

$$\mathrm{v}_{[1]}''''(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\mathrm{v}_{[1]}(\zeta,\omega) = 0, \qquad 0 \le \zeta \le \ell \tag{1.133}$$

$$\mathrm{v}_{[2]}''''(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\mathrm{v}_{[2]}(\zeta,t) = 0, \qquad \ell \le \zeta \le L \tag{1.134}$$

con le condizioni al bordo

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_{[1]}''(0,\omega) &= 0 \\ \mathrm{v}_{[2]}'''(\ell,\omega) - \mathrm{v}_{[1]}'''(\ell,\omega) - F(\omega) &= 0 \\ \mathrm{v}_{[2]}''(\ell,\omega) - v_{[1]}''(\ell,\omega) &= 0 \\ \mathrm{v}_{[2]}''(L,\omega) &= 0 \end{aligned} \tag{1.135}$$

avendo posto

$$k^2 = \frac{YJ}{\rho A} \tag{1.136}$$

e avendo indicato con $\mathrm{v}(\zeta,\omega)$ e $F(\omega)$ le trasformate di Fourier di $v(\zeta,t)$ e $f(t)/YJ$.

1.9 Modi naturali a tratti

Si considerino al posto della (1.25) le equazioni (1.133) e (1.134) con le condizioni al bordo omogenee

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_{[1]}''(0,\omega) &= 0 \\ \mathrm{v}_{[2]}'''(\ell,\omega) - \mathrm{v}_{[1]}'''(\ell,\omega) &= 0 \\ \mathrm{v}_{[2]}''(\ell,\omega) - \mathrm{v}_{[1]}''(\ell,\omega) &= 0 \\ \mathrm{v}_{[2]}''(L,\omega) &= 0 \end{aligned} \tag{1.137}$$

Si puó dimostrare che i *modi naturali* risultano ora descritti dalle funzioni

$$\phi_{[1]n}(\zeta) := \sin\left(\sqrt{\frac{\omega_n}{k}}\,\zeta\right), \qquad 0 \le \zeta \le \ell \tag{1.138}$$

$$\phi_{[2]n}(\zeta) := \sin\left(\sqrt{\frac{\omega_n}{k}}\,\zeta\right), \qquad \ell \le \zeta \le L \tag{1.139}$$

con

$$\omega_n := n^2\,\frac{\pi^2}{L^2}\,k \tag{1.140}$$

1.10 Parte singolare della soluzione a tratti

Ponendo nelle (1.100) e (1.101)

$$p_{[1]} := 0, \quad p_{[2]} := 0 \tag{1.141}$$

si ottiene

$$v_{[1]}''''(\zeta) = 0, \qquad 0 \le \zeta \le \ell \tag{1.142}$$

$$v_{[2]}''''(\zeta) = 0, \qquad \ell \le \zeta \le L \tag{1.143}$$

con le condizioni al bordo

$$\begin{aligned} v_{[1]}''(0) &= 0 \\ v_{[2]}'''(\ell) - v_{[1]}'''(\ell) - \frac{f}{YJ} &= 0 \\ v_{[2]}''(\ell) - v_{[1]}''(\ell) &= 0 \\ v_{[2]}''(L) &= 0 \end{aligned} \tag{1.144}$$

Integrando si ottiene

$$v_{[1]}(\zeta) = \frac{f}{YJ}\left(\frac{c_1}{6}\,\zeta^3 + \frac{L\,c_2}{2}\,\zeta^2 + L^2\,c_3\,\zeta + L^3\,c_4\right) \tag{1.145}$$

$$v_{[2]}(\zeta) = \frac{f}{YJ}\left(\frac{c_5}{6}\,\zeta^3 + \frac{L\,c_6}{2}\,\zeta^2 + L^2\,c_7\,\zeta + L^3\,c_8\right) \tag{1.146}$$

Le condizioni al bordo forniscono

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{L-\ell}{L}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{\ell\,(2\,L-\ell)(L-\ell)}{6\,L^3}, \quad c_4 = 0 \\ c_5 &= \frac{\ell}{L}, \quad c_6 = -\frac{\ell}{L}, \quad c_7 = \frac{\ell\,(\ell^2+2\,L^2)}{6\,L^3}, \quad c_8 = -\frac{\ell^3}{6\,L^3} \end{aligned} \tag{1.147}$$

Le espressioni così ottenute per $v(\zeta)$

$$v_{[1]}(\zeta) = \frac{f}{YJ}\left(\frac{(\ell-L)\,\zeta\,\left(\ell^2-2\,\ell\,L+\zeta^2\right)}{6\,L}\right) \tag{1.148}$$

$$v_{[2]}(\zeta) = \frac{f}{YJ}\left(\frac{-\ell\,(L-\zeta)\,\left(\ell^2-2\,L\,\zeta+\zeta^2\right)}{6\,L}\right) \tag{1.149}$$

sono equivalenti alla (1.65). Da queste risultano definite le funzioni

$$\psi_{[1]}(\zeta) := \frac{(\ell-L)\,\zeta\,\left(\ell^2-2\,\ell\,L+\zeta^2\right)}{6\,L} \tag{1.150}$$

$$\psi_{[2]}(\zeta) := -\frac{\ell\,(L-\zeta)\,\left(\ell^2-2\,L\,\zeta+\zeta^2\right)}{6\,L} \tag{1.151}$$

che soddisfano, per le (1.144), le condizioni al bordo

$$\begin{aligned} \psi''_{[1]}(0) &= 0 \\ \psi'''_{[2]}(\ell) - \psi'''_{[1]}(\ell) - 1 &= 0 \\ \psi''_{[2]}(\ell) - \psi''_{[1]}(\ell) &= 0 \\ \psi''_{[2]}(L) &= 0 \end{aligned} \tag{1.152}$$

1.11 Funzione di trasferimento a tratti

Si ponga

$$\mathrm{v}_{[1]}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega)\phi_{[1]i}(\zeta) + \bar{\mathrm{v}}_{[1]}(\zeta,\omega) \tag{1.153}$$

$$\mathrm{v}_{[2]}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega)\phi_{[2]i}(\zeta) + \bar{\mathrm{v}}_{[2]}(\zeta,\omega) \tag{1.154}$$

con

$$\bar{\mathrm{v}}_{[1]}(\zeta,\omega) := F(\omega)\psi_{[1]}(\zeta) \tag{1.155}$$

$$\bar{\mathrm{v}}_{[2]}(\zeta,\omega) := F(\omega)\psi_{[2]}(\zeta) \tag{1.156}$$

Sostituendo nella (1.132) la espressione di v definita dalle (1.153) e (1.154), e scegliendo $w = \phi_j$ si ottiene

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} q_i(\omega)\Big(\int_0^{\ell} \big(\phi_{[1]i}''''(\zeta) - \beta^4\phi_{[1]i}(\zeta)\big)\,\phi_{[1]j}(\zeta)\,d\zeta \\ &\quad + \int_{\ell}^{L} \big(\phi_{[2]i}''''(\zeta) - \beta^4\phi_{[2]i}(\zeta)\big)\,\phi_{[2]j}(\zeta)\,d\zeta\Big) \\ &\quad - \beta^4\Big(\int_0^{\ell} \bar{\mathrm{v}}_{[1]}(\zeta,\omega)\phi_{[1]j}(\zeta)\,d\zeta + \int_{\ell}^{L} \bar{\mathrm{v}}_{[2]}(\zeta,\omega)\phi_{[2]j}(\zeta)\,d\zeta\Big) = 0 \end{aligned} \tag{1.157}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} q_i(\omega)(\beta_i^4 - \beta^4)\Big(\int_0^{\ell} \phi_{[1]i}(\zeta)\phi_{[1]j}(\zeta)\,d\zeta + \int_{\ell}^{L} \phi_{[2]i}(\zeta)\phi_{[2]j}(\zeta)\,d\zeta\Big) \\ &\quad - \beta^4\Big(\int_0^{\ell} \bar{\mathrm{v}}_{[1]}(\zeta,\omega)\phi_{[1]j}(\zeta)\,d\zeta + \int_{\ell}^{L} \bar{\mathrm{v}}_{[2]}(\zeta,\omega)\phi_{[2]j}(\zeta)\,d\zeta\Big) = 0 \end{aligned} \tag{1.158}$$

Per la proprietà di ortogonalità (1.56) la espressione precedente diventa

$$
\begin{aligned}
& q_j(\omega)(\beta_j^4-\beta^4)\Big(\int_0^\ell \phi_{[1]j}(\zeta)^2\,d\zeta+\int_\ell^L \phi_{[2]j}(\zeta)^2\,d\zeta\Big) \\
& \quad -\beta^4\,F(\omega)\Big(\int_0^\ell \psi_{[1]}(\zeta)\phi_{[1]j}(\zeta)\,d\zeta+\int_\ell^L \psi_{[2]}(\zeta)\phi_{[2]j}(\zeta)\,d\zeta\Big)=0
\end{aligned}
\tag{1.159}
$$

Sostituendo $\psi_{[1]}$ e $\psi_{[2]}$ nella (1.99) si ha

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\ell \psi_{[1]}''''\,\phi_{[1]j}\,d\zeta+\int_\ell^L \psi_{[2]}''''\,\phi_{[2]j}\,d\zeta \\
& \quad +\Big(\psi_{[2]}'''(\ell)-\psi_{[1]}'''(\ell)-1\Big)\phi_{[2]j}(\ell)-\psi_{[1]}''(0)\phi_{[1]j}'(0) \\
& \quad -\big(\psi_{[2]}''(\ell)-\psi_{[1]}''(\ell)\big)\,\phi_{[2]j}'(\ell)+\psi_{[2]}''(L)\phi_{[2]j}'(L)=0
\end{aligned}
\tag{1.160}
$$

Integrando per parti si ottiene

$$
\int_0^\ell \psi_{[1]}\,\phi_{[1]j}''''\,d\zeta+\int_\ell^L \psi_{[2]}\,\phi_{[2]j}''''\,d\zeta=\phi_{[2]j}(\ell)
\tag{1.161}
$$

Risulta dunque

$$
\beta_j^4\left(\int_0^\ell \psi_{[1]}\,\phi_{[1]j}\,d\zeta+\int_\ell^L \psi_{[2]}\,\phi_{[2]j}\,d\zeta\right)=\phi_{[2]j}(\ell)
\tag{1.162}
$$

che, sostituita nella (1.159), fornisce

$$
\begin{aligned}
& q_j(\omega)(\beta_j^4-\beta^4)\Big(\int_0^\ell \phi_{[1]j}(\zeta)^2\,d\zeta+\int_\ell^L \phi_{[2]j}(\zeta)^2\,d\zeta\Big) \\
& \quad -\frac{\beta^4}{\beta_j}\,F(\omega)\phi_{[2]j}(\ell)=0
\end{aligned}
\tag{1.163}
$$

Ponendo

$$
\mu_j:=\frac{1}{k^2}\Big(\int_0^\ell \phi_{[1]j}(\zeta)^2\,d\zeta+\int_\ell^L \phi_{[2]j}(\zeta)^2\,d\zeta\Big)
\tag{1.164}
$$

la (1.163) si scrive

$$
q_j(\omega)\left(\omega_j^2-\omega^2\right)\mu_j=\frac{\omega^2}{\omega_j^2}\,F(\omega)\,\phi_j(\ell)
\tag{1.165}
$$

da cui si ottiene

$$
\boxed{q_j(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega_j^2(\omega_j^2-\omega^2)\mu_j}\,F(\omega)\,\phi_j(\ell)}
\tag{1.166}
$$

identica alla (1.80). Sostituendo questa espressione nelle (1.153) e (1.154) si ottiene

$$\mathrm{v}_{[1]}(\zeta,\omega) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\omega^2}{\omega_i^2\left(\omega_i^2-\omega^2\right)\mu_i}\, \phi_{[1]_i}(\ell)\phi_{[1]_i}(\zeta) + \psi_{[1]}(\zeta) \right) F(\omega) \qquad (1.167)$$

$$\mathrm{v}_{[2]}(\zeta,\omega) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\omega^2}{\omega_i^2\left(\omega_i^2-\omega^2\right)\mu_i}\, \phi_{[2]_i}(\ell)\phi_{[2]_i}(\zeta) + \psi_{[2]}(\zeta) \right) F(\omega) \qquad (1.168)$$

La funzione di trasferimento risulta definita anch'essa a tratti

$$H_{[1]}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega^2}{\omega_i^2\left(\omega_i^2-\omega^2\right)\mu_i}\, \phi_{[1]_i}(\ell)\phi_{[1]_i}(\zeta) + \psi_{[1]}(\zeta) \qquad (1.169)$$

$$H_{[2]}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega^2}{\omega_i^2\left(\omega_i^2-\omega^2\right)\mu_i}\, \phi_{[2]_i}(\ell)\phi_{[2]_i}(\zeta) + \psi_{[2]}(\zeta) \qquad (1.170)$$

Se si utilizzano per v, invece delle espressioni (1.153) e (1.154), le espressioni

$$\breve{\mathrm{v}}_{[1]}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega)\phi_{[1]_i}(\zeta) \qquad (1.171)$$

$$\breve{\mathrm{v}}_{[2]}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega)\phi_{[2]_i}(\zeta) \qquad (1.172)$$

si ottiene

$$\boxed{\breve{q}_j(\omega) = \frac{1}{(\omega_j^2-\omega^2)\mu_j}\, F(\omega)\, \phi_j(\ell)} \qquad (1.173)$$

e corrispondentemente

$$\breve{\mathrm{v}}_{[1]}(\zeta,\omega) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(\omega_i^2-\omega^2\right)\mu_i}\, \phi_{[1]_i}(\ell)\phi_{[1]_i}(\zeta) \right) F(\omega) \qquad (1.174)$$

$$\breve{\mathrm{v}}_{[2]}(\zeta,\omega) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(\omega_i^2-\omega^2\right)\mu_i}\, \phi_{[2]_i}(\ell)\phi_{[2]_i}(\zeta) \right) F(\omega) \qquad (1.175)$$

La funzione di trasferimento risulta in questo caso

$$\breve{H}_{[1]}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(\omega_i^2-\omega^2\right)\mu_i}\, \phi_{[1]_i}(\ell)\phi_{[1]_i}(\zeta) \qquad (1.176)$$

$$\breve{H}_{[2]}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(\omega_i^2-\omega^2\right)\mu_i}\, \phi_{[2]_i}(\ell)\phi_{[2]_i}(\zeta) \qquad (1.177)$$

Capitolo 2

Mensola con due coppie opposte

2.1 Equazioni di bilancio

Per ogni atto di moto

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \big(Q' + p\big)\, w \, d\zeta + \int_0^L \big(M' + Q + c\big)\, w' \, d\zeta \\
&\quad + \big(Q^+ - Q(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- + Q(0)\big)\, w(0) \\
&\quad + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Dalle integrazioni per parti

$$\int_0^L M'w' \, d\zeta = -\int_0^L M''w \, d\zeta + M'(L)w(L) - M'(0)w(0) \tag{2.2}$$

$$\int_0^L Qw' \, d\zeta = -\int_0^L Q'w \, d\zeta + Q(L)w(L) - Q(0)w(0) \tag{2.3}$$

$$\int_0^L cw' \, d\zeta = -\int_0^L c'w \, d\zeta + c(L))w(L) - c(0))w(0) \tag{2.4}$$

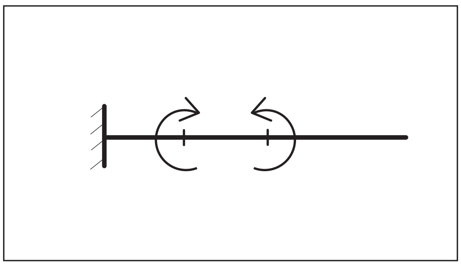

Figura 2.1: Mensola con due coppie opposte

si ottiene

$$\begin{aligned}&\int_0^L \left(-M'' + p - c'\right) w \, d\zeta \\ &\quad + \left(Q^+ + M'(L) + c(L)\right) w(L) + \left(Q^- - M'(0) - c(0)\right) w(0) \\ &\quad + \left(M^+ - M(L)\right) w'(L) + \left(M^- + M(0)\right) w'(0) = 0\end{aligned} \tag{2.5}$$

Nel caso di una mensola è

$$\boxed{v(0) = 0, \quad v'(0) = 0} \tag{2.6}$$

Per atti di moto compatibili con i vincoli la (2.5) diventa

$$\begin{aligned}&\int_0^L \left(-M'' + p - c'\right) w \, d\zeta \\ &\quad + \left(Q^+ + M'(L) + c(L)\right) w(L) + \left(M^+ - M(L)\right) w'(L) = 0\end{aligned} \tag{2.7}$$

Ne derivano le equazioni di bilancio

$$\boxed{-M'' + p - c' = 0} \tag{2.8}$$

con le condizioni al bordo

$$\boxed{\begin{aligned} Q^+ + M'(L) + c(L) = 0 \\ M^+ - M(L) = 0 \end{aligned}} \tag{2.9}$$

Definendo la funzione di risposta in modo tale che

$$M(\zeta) = YJ\, v''(\zeta) \tag{2.10}$$

alla (2.7) corrisponde

$$\begin{aligned}&\int_0^L \left(YJ\, v'''' - p + c'\right) w \, d\zeta \\ &\quad - \left(Q^+ + YJ\, v'''(L) + c(L)\right) w(L) - \left(M^+ - YJ\, v''(L)\right) w'(L) = 0\end{aligned} \tag{2.11}$$

La (2.8) e le (2.9) diventano

$$\boxed{YJv'''' - p + c' = 0} \tag{2.12}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &YJ\, v'''(L) = -Q^+ + c(L) \\ &YJ\, v''(L) = M^+ \end{aligned}} \tag{2.13}$$

a cui vanno aggiunte le (2.6).

2.2 Equazioni del moto

Ponendo

$$p(\zeta,t) := -\rho A\,\ddot{v}(L,t) \tag{2.14}$$
$$c(\zeta,t) := -N_p(t)\,h\,(\delta(\zeta-\ell_1)-\delta(\zeta-\ell_2)) \tag{2.15}$$
$$Q^+(t) := -m_a\,\ddot{v}(L,t) \tag{2.16}$$
$$M^+(t) := -m_a\,h_a^2\,\ddot{v}'(L,t) \tag{2.17}$$

la (2.11) diventa

$$\begin{aligned}&\int_0^L \Big(YJ\,v''''(\zeta,t)+\rho A\,\ddot{v}(\zeta,t)-N_p(t)\,h\,\big(\delta'(\zeta-\ell_1)-\delta'(\zeta-\ell_2)\big)\Big)\,w\,d\zeta\\&\quad+\Big(m_a\,\ddot{v}(L,t)-YJ\,v'''(L,t)\Big)\,w(L)\\&\quad+\Big(m_a\,h_a^2\,\ddot{v}'(L,t)+YJ\,v''(L,t)\Big)\,w'(L)=0\end{aligned} \tag{2.18}$$

Corrispondentemente la (2.12) diventa

$$YJ\,v''''(\zeta,t)+\rho A\,\ddot{v}(\zeta,t)-N_p(t)\,h\,\big(\delta'(\zeta-\ell_1)-\delta'(\zeta-\ell_2)\big)=0 \tag{2.19}$$

con le condizioni al bordo

$$v(0,t)=0,\quad v'(0,t)=0 \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}m_a\,\ddot{v}(L,t)-YJ\,v'''(L,t)&=0\\ m_a\,h_a^2\,\ddot{v}'(L,t)+YJ\,v''(L,t)&=0\end{aligned} \tag{2.21}$$

In termini di trasformate di Fourier

$$\mathrm{v}''''(\zeta,\omega)-\frac{\omega^2}{k^2}\,\mathrm{v}(\zeta,\omega)-M_p(\omega)\,\,\big(\delta'(\zeta-\ell_1)-\delta'(\zeta-\ell_2)\big)=0 \tag{2.22}$$

con le condizioni al bordo

$$\mathrm{v}(0,\omega)=0,\quad \mathrm{v}'(0,\omega)=0 \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{k^2}\,\alpha_a\,\mathrm{v}(L,\omega)+\mathrm{v}'''(L,\omega)&=0\\ -\frac{\omega^2}{k^2}\,\gamma_a\,\mathrm{v}'(L,\omega)+\mathrm{v}''(L,\omega)&=0\end{aligned} \tag{2.24}$$

avendo posto

$$k^2 = \frac{YJ}{\rho A}, \quad \alpha_a = \frac{m_a}{\rho A}, \quad \gamma_a = \frac{m_a\, h_a^2}{\rho A} \tag{2.25}$$

e avendo indicato con $\mathrm{v}(\zeta,\omega)$ e $M_p(\omega)$ le trasformate di Fourier di $v(\zeta,t)$ e $N_p(t)\,h/YJ$. La trasformata di Fourier della (2.18) è

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \Big(\mathrm{v}''''(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\,\mathrm{v}(\zeta,\omega) - M_p(\omega)\,\big(\delta'(\zeta-\ell_1) - \delta'(\zeta-\ell_2)\big)\Big)\, w\, d\zeta \\
&\quad - \Big(\frac{\omega^2}{k^2}\,\alpha_a\,\mathrm{v}(L,\omega) + \mathrm{v}'''(L,\omega)\Big)\, w(L) \\
&\quad + \Big(-\frac{\omega^2}{k^2}\,\gamma_a \mathrm{v}'(L,\omega) + \mathrm{v}''(L,\omega)\Big)\, w'(L) = 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

2.3 Modi naturali

Si consideri l'equazione

$$\mathrm{v}''''(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\,\mathrm{v}(\zeta,\omega) = 0 \tag{2.27}$$

con le condizioni al bordo (2.23), (2.24). Riguardando tale equazione, per un valore fissato di ω, come una equazione differenziale in ζ, se ne consideri la forma normale

$$\mathbf{y}'(\zeta) = \mathbf{A}\mathbf{y}(\zeta) \tag{2.28}$$

con

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}(\omega,\zeta) \\ \mathrm{v}'(\omega,\zeta) \\ \mathrm{v}''(\omega,\zeta) \\ \mathrm{v}'''(\omega,\zeta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\omega^2}{k^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

La soluzione è

$$\mathbf{y}(\zeta) = e^{\mathbf{A}\zeta}\mathbf{y}_o \tag{2.30}$$

Per valutare l'esponenziale occorre ridurre la matrice $\mathbf{A}$ nella forma di Jordan. Gli autovalori si possono indicare con

$$\beta, \quad -\beta, \quad i\,\beta, \quad -i\,\beta \tag{2.31}$$

con $\beta > 0$ tale che

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{k^2} \tag{2.32}$$

Essendo gli autovalori distinti, la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. Disponendo gli autovettori per colonne

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} -1 & 1 & i & -i \\ \beta & \beta & -\beta & -\beta \\ -\beta^2 & \beta^2 & -i\,\beta^2 & i\,\beta^2 \\ \beta^3 & \beta^3 & \beta^3 & \beta^3 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

si ha

$$e^{\mathbf{A}\zeta} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} e^{\beta\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\beta\zeta} \end{pmatrix} \mathbf{T} \tag{2.34}$$

La prima riga di questa matrice risulta

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2} & \frac{\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta} & \frac{-\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2\,\beta^2} & \frac{-\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta^3} \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

Pertanto la espressione di $\mathrm{v}(\zeta,\omega)$ è data dal prodotto di tale riga per $\mathbf{y}_o$, i cui elementi sono delle costanti arbitrarie

$$\begin{aligned} \mathrm{v}(\zeta,\omega) = {} & c_1(\omega)\frac{\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2} + c_2(\omega)\frac{\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta} \\ & + c_3(\omega)\frac{-\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2\,\beta^2} + c_4(\omega)\frac{-\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta^3} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Essendo

$$\begin{aligned} \mathrm{v}''(\zeta,\omega) = {} & c_1(\omega)\frac{\beta^2\,(-\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta))}{2} + c_2(\omega)\frac{\beta\,(-\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta))}{2} \\ & + c_3(\omega)\frac{\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2} + c_4(\omega)\frac{\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta} \end{aligned} \tag{2.37}$$

le condizioni al bordo (2.23) implicano

$$c_3(\omega) = 0, \quad c_4(\omega) = 0 \tag{2.38}$$

La matrice delle condizioni al bordo (2.24) ha per prima colonna

$$\begin{pmatrix} -\alpha_a\beta\cos(L\beta) + \alpha_a\beta\cosh(L\beta) - \sin(L\beta) + \sinh(L\beta) \\ \cos(L\beta) + \cosh(L\beta) - \beta^3\gamma_a\sin(L\beta) - \beta^3\gamma_a\sinh(L\beta) \end{pmatrix}$$

e per seconda colonna

$$\begin{pmatrix} \cos(L\beta) + \cosh(L\beta) - \alpha_a \beta \sin(L\beta) + \alpha_a \beta \sinh(L\beta) \\ \beta^3 \gamma_a \cos(L\beta) - \beta^3 \gamma_a \cosh(L\beta) + \sin(L\beta) + \sinh(L\beta) \end{pmatrix}$$

Il determinante risulta

$$\begin{aligned} &-2\Big(1 + \alpha_a \beta^4 \gamma_a + \beta\left(\alpha_a - \beta^2 \gamma_a\right) \cos(L\beta) \sinh(L\beta) \\ &\quad - \cosh(L\beta)\left(\left(-1 + \alpha_a \beta^4 \gamma_a\right) \cos(L\beta) + \beta\left(\alpha_a + \beta^2 \gamma_a\right) \sin(L\beta)\right)\Big) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Per calcolarne gli zeri, in forma approssimata, conviene dividere la espressione (2.39) per

$$-4\cosh(L\beta)\sqrt{\beta^2\left(\alpha_a + \beta^2\,\gamma_a\right)^2 + \left(-1 + \alpha_a \beta_a^4\,\gamma_a\right)^2} \tag{2.40}$$

Il grafico del determinante così scalato è riportato in Fig. 2.2. Indicando con β_n gli zeri del determinante, a ciascuno di questi corrisponde uno spazio nullo di dimensione uno per la matrice delle condizioni al bordo. Dalla (2.32) discende

$$\frac{\omega}{k} = \pm\beta^2 \tag{2.41}$$

Ponendo

$$\omega_n := \beta_n^2\, k \tag{2.42}$$

si ottiene infine per $\mathrm{v}(\zeta, \omega)$ la espressione

$$\mathrm{v}(\zeta, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\zeta)\big(c(\omega_n)\delta(\omega - \omega_n) + c(-\omega_n)\delta(\omega + \omega_n)\big) \tag{2.43}$$

La trasformata inversa di Fourier della (2.43) risulta

$$\begin{aligned} v(\zeta, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{v}(\zeta, \omega)\, e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \phi_n(\zeta)\big(c(\omega_n)(\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)) \\ &\qquad + c(-\omega_n)(\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t))\big) \end{aligned} \tag{2.44}$$

Riorganizzando i coefficienti la espressione precedente diventa

$$v(\zeta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\zeta)\big(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\big) \tag{2.45}$$

Questa è la descrizione del moto corrispondente alle equazioni (2.27), (2.23), (2.24). Tale descrizione è stata ottenuta attraverso una selezione, indotta

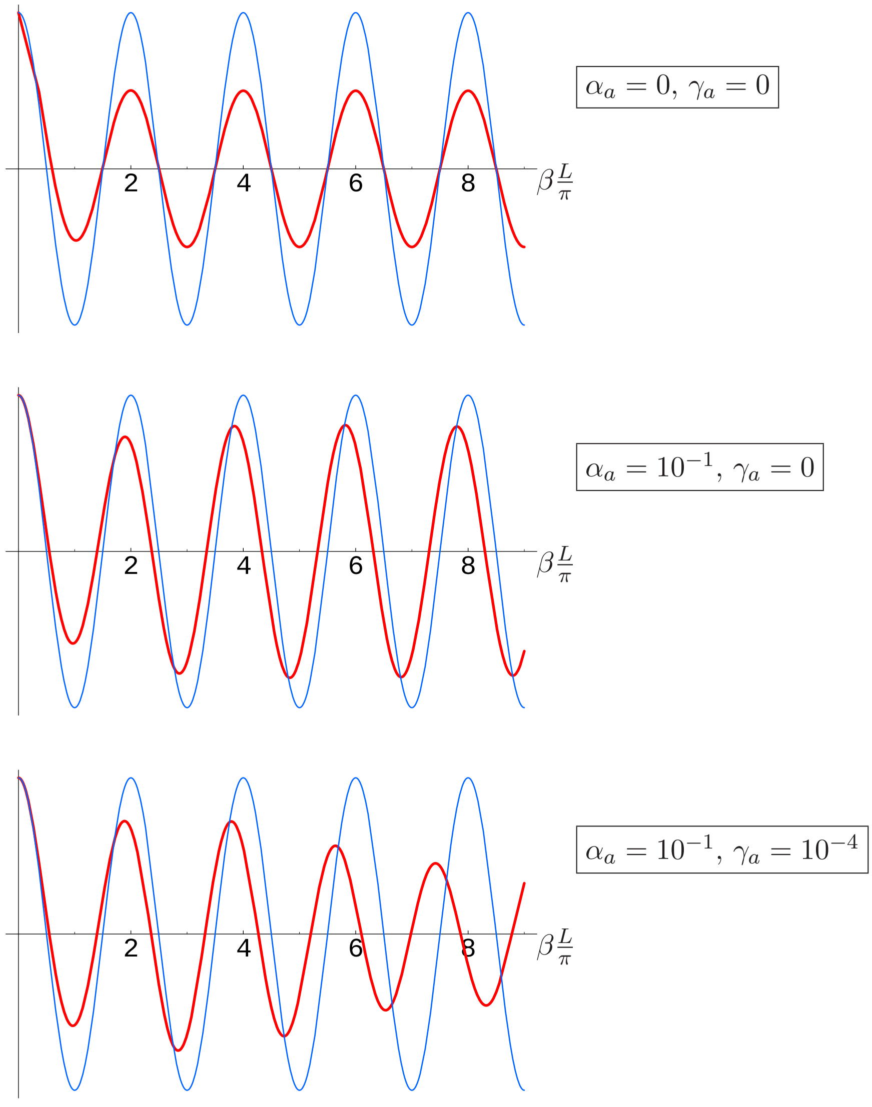

Figura 2.2: Grafico del determinante e di $\cos(L\beta)$

dalla condizioni al bordo, delle funzioni $e^{-i\omega t}$ utilizzate nella trasformata di Fourier.

Le funzioni $\phi_n(\zeta)$ si dicono *modi naturali*. Queste soddisfano la (2.27) con $\omega = \omega_n$, assieme alle condizioni al bordo (2.23) e (2.24). Si ha pertanto

$$\phi_n''''(\zeta) = \beta_n^4\, \phi_n(\zeta) \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned} \phi_n(0) &= 0 \\ \phi_n'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} \beta_n^4\, \alpha_a\, \phi_n(L) + \phi_n'''(L) &= 0 \\ -\beta_n^4\, \gamma_a\, \phi_n'(L) + \phi_n''(L) &= 0 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Poiché la (2.27), con le (2.23), è equivalente alla parte omogenea della (2.26)

$$\begin{aligned} &\int_0^L \Big(\mathrm{v}''''(\zeta,\omega) - \beta^4\, \mathrm{v}(\zeta,\omega)\Big)\, w\, d\zeta \\ &\quad - \Big(\beta^4\, \alpha_a\, \mathrm{v}(L,\omega) + \mathrm{v}'''(L,\omega)\Big)\, w(L) \\ &\quad + \Big(-\beta^4\, \gamma_a \mathrm{v}'(L,\omega) + \mathrm{v}''(L,\omega)\Big)\, w'(L) = 0 \end{aligned} \tag{2.49}$$

le funzioni $\phi_n(\zeta)$ soddisfano tale condizione per qualsiasi w, con $\beta = \beta_n$. In particolare è dunque

$$\begin{aligned} &\int_0^L \Big(\phi_i''''(\zeta) - \beta_i^4\, \phi_i(\zeta)\Big)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta \\ &\quad - \Big(\beta_i^4\, \alpha_a\, \phi_i(L) + \phi_i'''(L)\Big)\, \phi_j(L) \\ &\quad + \Big(-\beta_i^4\, \gamma_a \phi_i'(L) + \phi_i''(L)\Big)\, \phi_j'(L) = 0 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Attraverso ripetute integrazioni per parti si ha

$$\begin{aligned} &\int_0^L \Big(\phi_j''''(\zeta) - \beta_i^4\, \phi_j(\zeta)\Big)\, \phi_i(\zeta)\, d\zeta \\ &\quad - \Big(\beta_i^4\, \alpha_a\, \phi_j(L) + \phi_j'''(L)\Big)\, \phi_i(L) \\ &\quad + \Big(-\beta_i^4\, \gamma_a \phi_j'(L) + \phi_j''(L)\Big)\, \phi_i'(L) = 0 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Sottraendo a questa la espressione ottenuta dalla (2.50) scambiando i con j,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \Big(\phi_j''''(\zeta) - \beta_j^4\, \phi_j(\zeta)\Big)\, \phi_i(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad - \Big(\beta_j^4\, \alpha_a\, \phi_j(L) + \phi_j'''(L)\Big)\, \phi_i(L) \\
&\quad + \Big(- \beta_j^4\, \gamma_a \phi_j'(L) + \phi_j''(L)\Big)\, \phi_i'(L) = 0
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

si ottiene

$$
(\beta_j^4 - \beta_i^4)\Big(\int_0^L \phi_j(\zeta)\, \phi_i(\zeta)\, d\zeta + \alpha_a\, \phi_j(L)\, \phi_i(L) + \gamma_a \phi_j'(L)\, \phi_i'(L)\Big) = 0 \tag{2.53}
$$

Questa è la proprietà di ortogonalità dei modi.

2.4 Parte singolare della soluzione

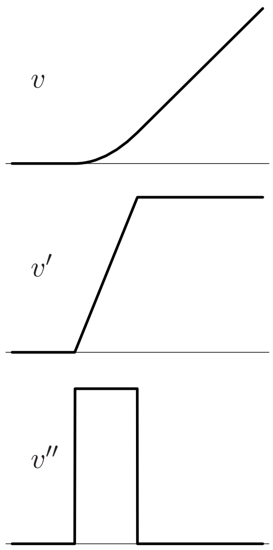

Figura 2.3: Soluzione statica

Nel caso in cui

$$
\begin{aligned}
p(\zeta) &:= 0 &(2.54)\\
c(\zeta) &:= -N_p\, h\, (\delta(\zeta - \ell_1) - \delta(\zeta - \ell_2)) &(2.55)\\
Q^+ &:= 0 &(2.56)\\
M^+ &:= 0 &(2.57)
\end{aligned}
$$

la (2.12) diventa

$$YJv'''' - N_p\, h\, (\delta'(\zeta - \ell_1) - \delta'(\zeta - \ell_2) = 0 \tag{2.58}$$

con le condizioni al bordo

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0 \tag{2.59}$$
$$v'''(L) = 0, \quad v''(L) = 0 \tag{2.60}$$

Integrando la (2.58) si ottiene, per via delle (2.59) e (2.60),

$$v''''(\zeta) = \frac{N_p\, h}{YJ} \big(\delta'(\zeta - \ell_1) - \delta'(\zeta - \ell_2)\big) \tag{2.61}$$

$$v'''(\zeta) = \frac{N_p\, h}{YJ} \big(\delta(\zeta - \ell_1) - \delta(\zeta - \ell_2)\big) \tag{2.62}$$

$$v''(\zeta) = \frac{N_p\, h}{YJ} \big(\mathfrak{h}(\zeta - \ell_1) - (\zeta - \ell_2)\mathfrak{h}(\zeta - \ell_2)\big) \tag{2.63}$$

$$v'(\zeta) = \frac{N_p\, h}{YJ} \big((\zeta - \ell_1)\mathfrak{h}(\zeta - \ell_1) - (\zeta - \ell_2)\mathfrak{h}(\zeta - \ell_2)\big) \tag{2.64}$$

$$v(\zeta) = \frac{N_p\, h}{YJ} \big(\frac{1}{2}(\zeta - \ell_1)^2\mathfrak{h}(\zeta - \ell_1) - \frac{1}{2}(\zeta - \ell_2)^2\mathfrak{h}(\zeta - \ell_2)\big) \tag{2.65}$$

avendo indicato con $\mathfrak{h}$ la funzione di Heaviside. Dalla (2.65) risulta definita la funzione

$$\psi(\zeta) := \frac{1}{2}(\zeta - \ell_1)^2\mathfrak{h}(\zeta - \ell_1) - \frac{1}{2}(\zeta - \ell_2)^2\mathfrak{h}(\zeta - \ell_2) \tag{2.66}$$

che soddisfa le condizioni al bordo (2.59) e (2.60).

2.5 Funzione di trasferimento

In termini di trasformate di Fourier la descrizione del moto è data dalla equazione (2.26) con le condizioni al bordo (2.23). Definendo

$$\bar{\mathrm{v}}(\zeta, \omega) := M_p(\omega)\psi(\zeta) \tag{2.67}$$

si ponga

$$\mathrm{v}(\zeta, \omega) = \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega)\phi_i(\zeta) + \bar{\mathrm{v}}(\zeta, \omega) \tag{2.68}$$

In questo modo si descrive la parte regolare di $\mathrm{v}(\zeta, \omega)$

$$\mathrm{v}(\zeta, \omega) - \bar{\mathrm{v}}(\zeta, \omega) \tag{2.69}$$

come “combinazione lineare” dei modi. Sostituendo la espressione (2.68) nella (2.26) con $w = \phi_j$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \int_0^L \Big(\phi_i''''(\zeta) - \beta^4\, \phi_i(\zeta) \\
&\qquad - M_p(\omega)\, \big(\delta'(\zeta-\ell_1) - \delta'(\zeta-\ell_2)\big)\Big)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \Big(\beta^4\, \alpha_a\, \phi_i(L) + \phi_i'''(L) \Big)\, \phi_j(L) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \Big(-\beta^4\, \gamma_a\, \phi_i'(L) + \phi_i''(L) \Big)\, \phi_j'(L) \\
&\quad + \int_0^L \Big(\bar{\mathrm{v}}''''(\zeta,\omega) - \beta^4\, \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega) \Big)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad - \Big(\beta^4\, \alpha_a\, \bar{\mathrm{v}}(L,\omega) + \bar{\mathrm{v}}'''(L,\omega) \Big)\, \phi_j(L) \\
&\quad + \Big(-\beta^4\, \gamma_a\, \bar{\mathrm{v}}'(L,\omega) + \bar{\mathrm{v}}''(L,\omega) \Big)\, \phi_j'(L) = 0
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

Per la (2.67) e (2.60) questa espressione diventa

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \int_0^L \Big(\phi_i''''(\zeta) - \beta^4\, \phi_i(\zeta) \Big)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \Big(\beta^4\, \alpha_a\, \phi_i(L) + \phi_i'''(L) \Big)\, \phi_j(L) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \Big(-\beta^4\, \gamma_a\, \phi_i'(L) + \phi_i''(L) \Big)\, \phi_j'(L) \\
&\quad - \beta^4 \Big(\int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta + \alpha_a\, \bar{\mathrm{v}}(L,\omega)\, \phi_j(L) + \gamma_a\, \bar{\mathrm{v}}'(L,\omega)\, \phi_j'(L) \Big) = 0
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

Per la (2.50) si ha

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} q_i(\omega)\,\big(\beta_i^4-\beta^4\big)\,\Big(\int_0^L \phi_i(\zeta)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta \\
&\quad + \alpha_a\,\phi_i(L)\,\phi_j(L) + \gamma_a\,\phi_i'(L)\,\phi_j'(L)\Big) \\
&\quad - \beta^4\Big(\int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta + \alpha_a\,\bar{\mathrm{v}}(L,\omega)\,\phi_j(L) + \gamma_a\,\bar{\mathrm{v}}'(L,\omega)\,\phi_j'(L)\Big) = 0
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

che, per la proprietà di ortogonalità (2.53), diventa

$$
\begin{aligned}
&q_j(\omega)\,\big(\beta_j^4-\beta^4\big)\,\Big(\int_0^L \phi_j(\zeta)^2\,d\zeta + \alpha_a\,\phi_j(L)^2 + \gamma_a\,\phi_j'(L)^2\Big) \\
&\quad - \beta^4\Big(\int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta + \alpha_a\,\bar{\mathrm{v}}(L,\omega)\,\phi_j(L) + \gamma_a\,\bar{\mathrm{v}}'(L,\omega)\,\phi_j'(L)\Big) = 0
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

Si noti che per la (2.58) e la (2.67) è

$$
\int_0^L \bar{\mathrm{v}}''''(\zeta,\omega)\phi_j(\zeta)\,d\zeta = M_p(\omega)\int_0^L \big(\delta'(\zeta-\ell_1)-\delta'(\zeta-\ell_2)\big)\phi_j(\zeta)\,d\zeta \tag{2.74}
$$

con le (2.59) e (2.60). Integrando per parti si ha per le (2.48)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \bar{\mathrm{v}}''''(\zeta,\omega)\phi_j(\zeta)\,d\zeta \\
&\quad = \int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\phi_j''''(\zeta)\,d\zeta + \beta_j^4\big(\alpha_a\bar{\mathrm{v}}(L,\omega)\phi(L) + \gamma_a\bar{\mathrm{v}}'(L,\omega)\phi_j'(L)\big)
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

Essendo poi $\phi_j'''' = \beta_j\,\phi_j$, dalla precedente si ha

$$
\begin{aligned}
&\beta_j^4\Big(\int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\phi_j(\zeta)\,d\zeta + \alpha_a\bar{\mathrm{v}}(L,\omega)\phi_j(L) + \gamma_a\bar{\mathrm{v}}'(L,\omega)\phi_j'(L)\Big) \\
&\quad = M_p(\omega)\int_0^L \big(\delta'(\zeta-\ell_1)-\delta'(\zeta-\ell_2)\big)\phi_j(\zeta)\,d\zeta \\
&\quad = M_p(\omega)\big(\phi_j'(\ell_2)-\phi_j'(\ell_1)\big)
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

La (2.73) diventa pertanto

$$
\begin{aligned}
&q_j(\omega)\,\big(\beta_j^4-\beta^4\big)\,\Big(\int_0^L \phi_j(\zeta)^2\,d\zeta + \alpha_a\,\phi_j(L)^2 + \gamma_a\,\phi_j'(L)^2\Big) \\
&\quad = \frac{\beta^4}{\beta_j^4} M_p(\omega)\big(\phi_j'(\ell_2)-\phi_j'(\ell_1)\big)
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

Ponendo

$$\mu_j := \frac{1}{k^2}\Big(\int_0^L \phi_j(\zeta)^2\, d\zeta + \alpha_a\, \phi_j(L)^2 + \gamma_a\, \phi_j'(L)^2\Big) \tag{2.78}$$

la (2.77) si scrive

$$q_j(\omega)\,\big(\omega_j^2 - \omega^2\big)\,\mu_j = \frac{\omega^2}{\omega_j^2} M_p(\omega)\big(\phi_j'(\ell_2) - \phi_j'(\ell_1)\big) \tag{2.79}$$

da cui si ottiene

$$\boxed{q_j(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_j^2(\omega_j^2 - \omega^2)\mu_j}\, M_p(\omega)\big(\phi_j'(\ell_2) - \phi_j'(\ell_1)\big)} \tag{2.80}$$

Sostituendo questa espressione nella (2.68) si ottiene

$$\mathrm{v}(\zeta,\omega) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\omega^2}{\omega_i^2\,\big(\omega_i^2 - \omega^2\big)\,\mu_i}\,\big(\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)\big)\,\phi_i(\zeta) + \psi(\zeta)\right) M_p(\omega) \tag{2.81}$$

La funzione di trasferimento risulta dunque

$$\boxed{H(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega^2}{\omega_i^2\,\big(\omega_i^2 - \omega^2\big)\,\mu_i}\,\big(\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)\big)\,\phi_i(\zeta) + \psi(\zeta)} \tag{2.82}$$

Se si utilizza per $\mathrm{v}(\zeta,\omega)$, invece della espressione (2.68), la espressione

$$\breve{\mathrm{v}}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega)\phi_i(\zeta) \tag{2.83}$$

dalla (2.26), con $w = \phi_j$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega) \int_0^L \Big(\phi_i''''(\zeta) - \beta^4\,\phi_i(\zeta) \\
&\qquad - M_p(\omega)\,\big(\delta'(\zeta-\ell_1) - \delta'(\zeta-\ell_2)\big)\Big)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega)\Big(\beta^4\,\alpha_a\,\phi_i(L) + \phi_i'''(L)\Big)\,\phi_j(L) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega)\Big(-\beta^4\,\gamma_a\,\phi_i'(L) + \phi_i''(L)\Big)\,\phi_j'(L) = 0
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Per la (2.50) si ha

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega)(\beta_i^4 - \beta^4)\Big(\int_0^L \phi_i(\zeta)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad + \alpha_a\, \phi_i(L)\, \phi_j(L) + \gamma_a\, \phi_i'(L)\, \phi_j'(L)\Big) \\
&\quad - M_p(\omega) \int_0^L \big(\delta'(\zeta - \ell_1) - \delta'(\zeta - \ell_2)\big)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta = 0
\end{aligned}
\tag{2.85}
$$

che, per la proprietà di ortogonalità (2.53), diventa

$$
\begin{aligned}
&\breve{q}_j(\omega)\, \big(\beta_j^4 - \beta^4\big)\, \Big(\int_0^L \phi_j(\zeta)^2\, d\zeta + \alpha_a\, \phi_j(L)^2 + \gamma_a\, \phi_j'(L)^2 \Big) \\
&- M_p(\omega) \int_0^L \big(\delta'(\zeta - \ell_1) - \delta'(\zeta - \ell_2)\big)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta = 0
\end{aligned}
\tag{2.86}
$$

Si ottiene infine

$$
\boxed{\breve{q}_j(\omega) = \frac{1}{(\omega_j^2 - \omega^2)\mu_j}\, M_p(\omega)\, \big(\phi_j'(\ell_2) - \phi_j'(\ell_1)\big)}
\tag{2.87}
$$

e corrispondentemente

$$
\check{\mathrm{v}}(\zeta, \omega) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(\omega_i^2 - \omega^2\right) \mu_i}\, \big(\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)\big) \phi_i(\zeta) \right) M_p(\omega)
\tag{2.88}
$$

La funzione di trasferimento risulta in questo caso

$$
\boxed{\breve{H}(\zeta, \omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(\omega_i^2 - \omega^2\right) \mu_i}\, \big(\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)\big) \phi_i(\zeta)}
\tag{2.89}
$$

La differenza tra le due espressioni della funzione di trasferimento è

$$
H(\zeta, \omega) - \breve{H}(\zeta, \omega) = \psi(\zeta) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)}{\omega_i^2 \mu_i}\, \phi_i(\zeta)
\tag{2.90}
$$

È interessante interpretarne il significato. Si noti che la (2.76) implica

$$
\begin{aligned}
&\beta_j^4 \Big(\int_0^L \psi(\zeta) \phi_j(\zeta)\, d\zeta + \alpha_a \psi(L) \phi_j(L) + \gamma_a \psi'(L) \phi_j'(L) \Big) \\
&= \big(\phi_j'(\ell_2) - \phi_j'(\ell_1)\big)
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

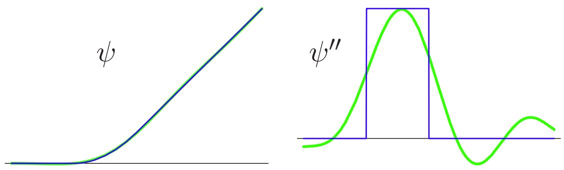

Figura 2.4: Approssimazione regolare della soluzione statica con 5 modi

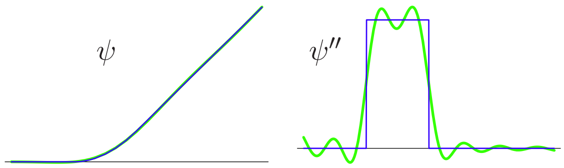

Figura 2.5: Approssimazione regolare della soluzione statica con 15 modi

Poichè per la ortogonalità dei modi

$$\psi(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_0^L \psi(\zeta)\phi_i(\zeta)\, d\zeta + \alpha_a \psi(L)\phi_i(L) + \gamma_a \psi'(L)\phi_i'(L)}{\int_0^L \phi_i(\zeta)^2\, d\zeta + \alpha_a \psi(L)^2 + \gamma_a \psi'(L)^2}\, \phi_i(\zeta) \tag{2.92}$$

risulta

$$\psi(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)}{\beta_i^4 \int_0^L \phi_i(\zeta)^2\, d\zeta}\, \phi_i(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)}{\omega_i^2\, \mu_i}\, \phi_i(\zeta) \tag{2.93}$$

Pertanto dalla (2.90) si ha

$$H(\zeta,\omega) - \breve{H}(\zeta,\omega) = \sum_{i=N}^{\infty} \frac{\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)}{\omega_i^2 \mu_i}\, \phi_i(\zeta) \tag{2.94}$$

La differenza tra le funzioni di trasferimento consiste dunque nel resto della serie (2.93) troncata ai primi N termini. Si noti che tale differenza non dipende da ω. È anche utile rilevare che, dal confronto della (2.80) con la (2.87), risulta

$$q_j(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\, \breve{q}_j(\omega) \tag{2.95}$$

In Fig. 2.4 e Fig. 2.5 è riportato il grafico di $\psi(\zeta)$ assieme al grafico della espressione data dalla serie (2.93) troncata rispettivamente ai primi 5 termini o ai primi 15 termini.

2.6 Descrizione a tratti

Riguardando la trave come formata da tre travi distinte, dalla (2.1) si ottiene per integrazione per parti, invece della (2.5),

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\ell_1} \left(-M''_{[1]} + p_{[1]} - c'_{[1]}\right) w_{[1]}\, d\zeta + \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left(-M''_{[2]} + p_{[2]} - c'_{[2]}\right) w_{[2]}\, d\zeta \\
&+ \int_{\ell_2}^{L} \left(-M''_{[3]} + p_{[3]} - c'_{[3]}\right) w_{[3]}\, d\zeta \\
&+ \left(Q^-_{[1]} - M'_{[1]}(0)\right) w_{[1]}(0) + \left(Q^+_{[1]} + M'_{[1]}(\ell_1)\right) w_{[1]}(\ell_1) \\
&+ \left(Q^-_{[2]} - M'_{[2]}(\ell_1)\right) w_{[2]}(\ell_1) + \left(Q^+_{[2]} + M'_{[2]}(\ell_2)\right) w_{[2]}(\ell_2) \\
&+ \left(Q^-_{[3]} - M'_{[3]}(\ell_2)\right) w_{[3]}(\ell_2) + \left(Q^+_{[3]} + M'_{[3]}(L)\right) w_{[3]}(L) \\
&+ \left(M^-_{[1]} + M_{[1]}(0)\right) w'_{[1]}(0) + \left(M^+_{[1]} - M_{[1]}(\ell_1)\right) w'_{[1]}(\ell_1) \\
&+ \left(M^-_{[2]} + M_{[2]}(\ell_1)\right) w'_{[2]}(\ell_1) + \left(M^+_{[2]} - M_{[2]}(\ell_2)\right) w'_{[2]}(\ell_2) \\
&+ \left(M^-_{[3]} + M_{[3]}(\ell_2)\right) w'_{[3]}(\ell_2) + \left(M^+_{[3]} - M_{[3]}(L)\right) w'_{[3]}(L) = 0
\end{aligned}
\tag{2.96}
$$

Le condizioni al bordo e le condizioni di collegamento dei tre tratti sono

$$
\boxed{
\begin{array}{cc}
v_{[1]}(0) = 0, & v'_{[1]}(0) = 0 \\
v_{[1]}(\ell_1) = v_{[2]}(\ell_1), & v'_{[1]}(\ell_1) = v'_{[2]}(\ell_1) \\
v_{[2]}(\ell_2) = v_{[3]}(\ell_2), & v'_{[2]}(\ell_2) = v'_{[3]}(\ell_2)
\end{array}
}
\tag{2.97}
$$

Per atti di moto compatibili con le (2.97), la (2.96) si trasforma nella

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\ell_1} \left(-M''_{[1]} + p_{[1]} - c'_{[1]}\right) w_{[1]}\, d\zeta + \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left(-M''_{[2]} + p_{[2]} - c'_{[2]}\right) w_{[2]}\, d\zeta \\
&+ \int_{\ell_2}^{L} \left(-M''_{[3]} + p_{[3]} - c'_{[3]}\right) w_{[3]}\, d\zeta \\
&+ \left(Q^+_{[1]} + Q^-_{[2]} + M'_{[1]}(\ell_1) - M'_{[2]}(\ell_1)\right) w_{[2]}(\ell_1) \\
&+ \left(Q^+_{[2]} + Q^-_{[3]} + M'_{[2]}(\ell_2) - M'_{[3]}(\ell_2)\right) w_{[3]}(\ell_2) \\
&+ \left(M^+_{[1]} + M^-_{[2]} - M_{[1]}(\ell_1) + M_{[2]}(\ell_1)\right) w'_{[2]}(\ell_1) \\
&+ \left(M^+_{[2]} + M^-_{[3]} - M_{[2]}(\ell_2) + M_{[3]}(\ell_2)\right) w'_{[3]}(\ell_2) \\
&+ \left(Q^+_{[3]} + M'_{[3]}(L)\right) w_{[3]}(L) + \left(M^+_{[3]} - M_{[3]}(L)\right) w'_{[3]}(L) = 0
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

Assegnando

$$
\begin{aligned}
c_{[i]} &:= 0 \\
Q^+_{[1]} + Q^-_{[2]} &:= 0 \\
Q^+_{[2]} + Q^-_{[3]} &:= 0 \\
M^+_{[1]} + M^-_{[2]} &:= -N_p\, h \\
M^+_{[2]} + M^-_{[3]} &:= N_p\, h
\end{aligned}
\tag{2.99}
$$

la (2.98) diventa

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^{\ell_1} \left(M''_{[1]} - p_{[1]}\right) w_{[1]}\, d\zeta - \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left(M''_{[2]} - p_{[2]}\right) w_{[2]}\, d\zeta \\
&\quad - \int_{\ell_2}^{L} \left(M''_{[3]} - p_{[3]}\right) w_{[3]}\, d\zeta \\
&\quad + \left(M'_{[1]}(\ell_1) - M'_{[2]}(\ell_1)\right) w_{[2]}(\ell_1) \\
&\quad + \left(M'_{[2]}(\ell_2) - M'_{[3]}(\ell_2)\right) w_{[3]}(\ell_2) \\
&\quad - (N_p\, h + M_{[1]}(\ell_1) - M_{[2]}(\ell_1))\, w'_{[2]}(\ell_1) \\
&\quad + (N_p\, h - M_{[2]}(\ell_2) + M_{[3]}(\ell_2))\, w'_{[3]}(\ell_2) \\
&\quad + \left(Q^+_{[3]} + M'_{[3]}(L)\right) w_{[3]}(L) + \left(M^+_{[3]} - M_{[3]}(L)\right) w'_{[3]}(L) = 0
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

Utilizzando la funzione di risposta (2.10) si ha infine

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\ell_1} \left(YJ\, v''''_{[1]} - p_{[1]}\right) w_{[1]}\, d\zeta + \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left(YJ\, v''''_{[2]} - p_{[2]}\right) w_{[2]}\, d\zeta \\
&\quad + \int_{\ell_2}^{L} \left(YJ\, v''''_{[3]} - p_{[3]}\right) w_{[3]}\, d\zeta \\
&\quad - YJ \left(v'''_{[1]}(\ell_1) - v'''_{[2]}(\ell_1)\right) w_{[2]}(\ell_1) \\
&\quad - YJ \left(v'''_{[2]}(\ell_2) - v'''_{[3]}(\ell_2)\right) w_{[3]}(\ell_2) \\
&\quad + \left(N_p\, h + YJ \left(v''_{[1]}(\ell_1) - v''_{[2]}(\ell_1)\right)\right) w'_{[2]}(\ell_1) \\
&\quad - \left(N_p\, h - YJ \left(v''_{[2]}(\ell_2) - v''_{[3]}(\ell_2)\right)\right) w'_{[3]}(\ell_2) \\
&\quad - \left(Q^+_{[3]} + YJ\, v'''_{[3]}(L)\right) w_{[3]}(L) - M^+_{[3]} + YJ\, v''_{[3]}(L)\, w'_{[3]}(L) = 0
\end{aligned}
\tag{2.101}
$$

La condizione che tale espressione sia nulla per qualsiasi atto di moto compatibile con le condizioni al bordo, è equivalente alle equazioni differenziali

$$\boxed{\begin{aligned} &YJ\, v''''_{[1]}(\zeta) - p_{[1]} = 0, \qquad && 0 \le \zeta \le \ell_1 \\ &YJ\, v''''_{[2]}(\zeta) - p_{[2]} = 0, && \ell_1 \le \zeta \le \ell_2 \\ &YJ\, v''''_{[3]}(\zeta) - p_{[3]} = 0, && \ell_2 \le \zeta \le L \end{aligned}} \tag{2.102}$$

con le condizioni al bordo (2.97) e

$$\boxed{\begin{aligned} v'''_{[1]}(\ell_1) - v'''_{[2]}(\ell_1) &= 0 \\ v'''_{[2]}(\ell_2) - v'''_{[3]}(\ell_2) &= 0 \\ N_p\, h + YJ\left(v''_{[1]}(\ell_1) - v''_{[2]}(\ell_1)\right) &= 0 \\ N_p\, h - YJ\left(v''_{[2]}(\ell_2) - v''_{[3]}(\ell_2)\right) &= 0 \\ Q^+_{[3]} + YJ\, v'''_{[3]}(L) &= 0 \\ -M^+_{[3]} + YJ\, v''_{[3]}(L) &= 0 \end{aligned}} \tag{2.103}$$

2.7 Descrizione a tratti e regolarizzazione

Si descrive qui come arrivare alla (2.100) direttamente dalla (2.5). Invece di riguardare la trave come costituita da tre travi distinte unite tra loro, si può più semplicemente suddividere l'intervallo $[0, L]$ in tre parti. Non è però corretto esprimere l'integrale su $[0, L]$ nella (2.5) come somma degli integrali su ciascuna parte ma occorre procedere nel modo seguente. Si assuma per M la seguente decomposizione

$$\begin{aligned} M(\zeta) = \widetilde{M}(\zeta) &+ [\![M]\!]_{\ell_1}\, \mathfrak{h}(\zeta - \ell_1) + [\![M']\!]_{\ell_1} (\zeta - \ell_1)\mathfrak{h}(\zeta - \ell_1) \\ &+ [\![M]\!]_{\ell_2}\, \mathfrak{h}(\zeta - \ell_2) + [\![M']\!]_{\ell_2} (\zeta - \ell_2)\mathfrak{h}(\zeta - \ell_2) \end{aligned} \tag{2.104}$$

essendo $[\![M]\!]_{\ell_1}$, $[\![M]\!]_{\ell_2}$, $[\![M']\!]_{\ell_1}$, $[\![M']\!]_{\ell_2}$ delle costanti e $\widetilde{M}$ una funzione continua con derivata prima continua in ℓ e perciò tale che[1]

$$\int_0^L \widetilde{M}''\, w\, d\zeta = \int_0^{\ell_1} \widetilde{M}''\, w\, d\zeta + \int_{\ell_1}^{\ell_2} \widetilde{M}''\, w\, d\zeta + \int_{\ell_2}^{L} \widetilde{M}''\, w\, d\zeta \tag{2.105}$$

[1]Si dovrebbe dire: M' sia una funzione a variazione limitata ($M' \in \mathrm{BV}([0, L])$); esiste allora una sua decomposizione nella somma di una funzione assolutamente continua e di una funzione singolare [A. Tesei, Istituzioni di Analisi Superiore, Boringhieri, 1997, Teorema 10.4.6, p. 325].

Dalla (2.104) si ha

$$
\begin{aligned}
M'(\zeta) = \widetilde{M}'(\zeta) + [\![M]\!]_{\ell_1}\, \delta(\zeta-\ell_1) + [\![M']\!]_{\ell_1}\, \mathfrak{h}(\zeta-\ell_1) \\
+ [\![M]\!]_{\ell_2}\, \delta(\zeta-\ell_2) + [\![M']\!]_{\ell_2}\, \mathfrak{h}(\zeta-\ell_2)
\end{aligned}
\tag{2.106}
$$

$$
\begin{aligned}
M''(\zeta) = \widetilde{M}''(\zeta) + [\![M]\!]_{\ell_1}\, \delta'(\zeta-\ell_1) + [\![M']\!]_{\ell_1}\, \delta(\zeta-\ell_1) \\
+ [\![M]\!]_{\ell_2}\, \delta'(\zeta-\ell_2) + [\![M']\!]_{\ell_2}\, \delta(\zeta-\ell_2)
\end{aligned}
\tag{2.107}
$$

Sostituendo la (2.107) nella (2.5)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \left(-M'' + p - c'\right) w\, d\zeta \\
&\quad + \big(Q^+ + M'(L) + c(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- - M'(0) - c(0)\big)\, w(0) \\
&\quad + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0
\end{aligned}
$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^L \widetilde{M}''\, w\, d\zeta + \int_0^L (p - c')\, w\, d\zeta \\
&\quad -\int_0^L \big([\![M]\!]_{\ell_1}\, \delta'(\zeta-\ell_1) + [\![M']\!]_{\ell_1}\, \delta(\zeta-\ell_1)\big)\, w\, d\zeta \\
&\quad -\int_0^L \big([\![M]\!]_{\ell_2}\, \delta'(\zeta-\ell_2) + [\![M']\!]_{\ell_2}\, \delta(\zeta-\ell_2)\big)\, w\, d\zeta \\
&\quad + \big(Q^+ + M'(L) + c(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- - M'(0) - c(0)\big)\, w(0) \\
&\quad + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0
\end{aligned}
\tag{2.108}
$$

che diventa

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^L \widetilde{M}''\, w\, d\zeta + \int_0^L (p - c')\, w\, d\zeta \\
&\quad + [\![M]\!]_{\ell_1}\, w'(\ell_1) - [\![M']\!]_{\ell_1}\, w(\ell_1) + [\![M]\!]_{\ell_2}\, w'(\ell_2) - [\![M']\!]_{\ell_2}\, w(\ell_2) \\
&\quad + \big(Q^+ + M'(L) + c(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- - M'(0) - c(0)\big)\, w(0) \\
&\quad + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0
\end{aligned}
\tag{2.109}
$$

Sostituendo la (2.105) si ottiene

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^{\ell_1} \widetilde{M}''\, w\, d\zeta - \int_{\ell_1}^{\ell_2} \widetilde{M}''\, w\, d\zeta - \int_{\ell_2}^{L} \widetilde{M}''\, w\, d\zeta + \int_0^L (p - c')\, w\, d\zeta \\
&\quad + [\![M]\!]_{\ell_1}\, w'(\ell_1) - [\![M']\!]_{\ell_1}\, w(\ell_1) + [\![M]\!]_{\ell_2}\, w'(\ell_2) - [\![M']\!]_{\ell_2}\, w(\ell_2) \\
&\quad + \big(Q^+ + M'(L) + c(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- - M'(0) - c(0)\big)\, w(0) \\
&\quad + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0
\end{aligned}
\tag{2.110}
$$

Si assuma ora che p sia tale che

$$\int_0^L p\, w\, d\zeta = \int_0^{\ell_1} p\, w\, d\zeta + \int_{\ell_1}^{\ell_2} p\, w\, d\zeta + \int_{\ell_2}^{L} p\, w\, d\zeta \tag{2.111}$$

mentre c abbia l'espressione

$$c(\zeta) = -N_p\, h\, (\delta(\zeta - \ell_1) - \delta(\zeta - \ell_2)) \tag{2.112}$$

Dalla (2.110) si ha

$$\begin{aligned}
&-\int_0^{\ell_1} \left(\widetilde{M}'' - p\right) w\, d\zeta - \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left(\widetilde{M}'' - p\right) w\, d\zeta - \int_{\ell_2}^{L} \left(\widetilde{M}'' - p\right) w\, d\zeta \\
&\quad - N_p\, h\, (w'(\ell_1) - w'(\ell_2)) \\
&\quad + [\![M]\!]_{\ell_1} w'(\ell_1) - [\![M']\!]_{\ell_1} w(\ell_1) + [\![M]\!]_{\ell_2} w'(\ell_2) - [\![M']\!]_{\ell_2} w(\ell_2) \\
&\quad + \left(Q^+ + M'(L)\right) w(L) + \left(Q^- - M'(0)\right) w(0) \\
&\quad + \left(M^+ - M(L)\right) w'(L) + \left(M^- + M(0)\right) w'(0) = 0
\end{aligned} \tag{2.113}$$

Per atti di moto compatibili con i vincoli (2.6) la (2.113) diventa

$$\begin{aligned}
&-\int_0^{\ell_1} \left(\widetilde{M}'' - p\right) w\, d\zeta - \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left(\widetilde{M}'' - p\right) w\, d\zeta - \int_{\ell_2}^{L} \left(\widetilde{M}'' - p\right) w\, d\zeta \\
&\quad - \left(N_p\, h - [\![M]\!]_{\ell_1}\right) w'(\ell_1) + \left(N_p\, h + [\![M]\!]_{\ell_2}\right) w'(\ell_2) \\
&\quad - [\![M']\!]_{\ell_1} w(\ell_1) - [\![M']\!]_{\ell_2} w(\ell_2) \\
&\quad + \left(Q^+ + M'(L)\right) w(L) + \left(M^+ - M(L)\right) w'(L) = 0
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Ne discende l'equazione di bilancio

$$\boxed{\widetilde{M}'' - \widetilde{p} = 0} \tag{2.115}$$

e le condizioni

$$\boxed{\begin{aligned}
&N_p\, h - [\![M]\!]_{\ell_1} = 0 \\
&N_p\, h + [\![M]\!]_{\ell_2} = 0 \\
&[\![M']\!]_{\ell_1} = 0 \\
&[\![M']\!]_{\ell_2} = 0 \\
&\widetilde{M}'(L) + [\![M']\!]_{\ell_1} + [\![M']\!]_{\ell_2} = -Q^+ \\
&\widetilde{M}(L) + [\![M]\!]_{\ell_1} + [\![M]\!]_{\ell_2} = M^+
\end{aligned}} \tag{2.116}$$

avendo espresso $M(L)$ e $M'(L)$ attraverso la (2.104). Alla decomposizione (2.104) corrisponde, attraverso la funzione di risposta (2.10), la decomposizione di v

$$
\begin{aligned}
v(\zeta) = \widetilde{v}(\zeta) &+ \frac{1}{YJ}\left(\frac{1}{2}[\![M]\!]_{\ell_1}(\zeta-\ell_1)^2 + \frac{1}{6}[\![M']\!]_{\ell_1}(\zeta-\ell_1)^3\right)\mathfrak{h}(\zeta-\ell_1) \\
&+ \frac{1}{YJ}\left(\frac{1}{2}[\![M]\!]_{\ell_2}(\zeta-\ell_2)^2 + \frac{1}{6}[\![M']\!]_{\ell_2}(\zeta-\ell_2)^3\right)\mathfrak{h}(\zeta-\ell_2)
\end{aligned}
\tag{2.117}
$$

risultando $\widetilde{M} = YJ\,\widetilde{v}''$. Si ottiene pertanto, dalle (2.115) e (2.116),

$$
\boxed{YJ\,\widetilde{v}'''' - \widetilde{p} = 0} \tag{2.118}
$$

e le condizioni

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& N_p\,h - [\![M]\!]_{\ell_1} = 0 \\
& N_p\,h + [\![M]\!]_{\ell_2} = 0 \\
& [\![M']\!]_{\ell_1} = 0 \\
& [\![M']\!]_{\ell_2} = 0 \\
& YJ\,\widetilde{v}'''(L) + [\![M']\!]_{\ell_1} + [\![M']\!]_{\ell_2} = -Q^+ \\
& YJ\,\widetilde{v}''(L) + [\![M]\!]_{\ell_1} + [\![M]\!]_{\ell_2} = M^+
\end{aligned}
}
\tag{2.119}
$$

a cui vanno aggiunte le (2.6).

Si noti infine che, definendo su ciascuno degli intervalli $[0,\ell_1]$, $[\ell_1,\ell_2]$, $[\ell_2,L]$ rispettivamente

$$
\begin{aligned}
& M_{[1]}(\zeta) := \widetilde{M}(\zeta) \\
& M_{[2]}(\zeta) := \widetilde{M}(\zeta) + [\![M]\!]_{\ell_1} + [\![M']\!]_{\ell_1}(\zeta-\ell_1) \\
& M_{[3]}(\zeta) := \widetilde{M}(\zeta) + [\![M]\!]_{\ell_1} + [\![M']\!]_{\ell_1}(\zeta-\ell_1) + [\![M]\!]_{\ell_2} + [\![M']\!]_{\ell_2}(\zeta-\ell_2)
\end{aligned}
\tag{2.120}
$$

si ha, per la continuità di $\widetilde{M}$ e $\widetilde{M}'$ in ℓ_1 e in ℓ_2,

$$
\begin{aligned}
[\![M]\!]_{\ell_1} &= M_{[2]}(\ell_1) - M_{[1]}(\ell_1) \\
[\![M]\!]_{\ell_2} &= M_{[3]}(\ell_2) - M_{[2]}(\ell_2) \\
[\![M']\!]_{\ell_1} &= M'_{[2]}(\ell_1) - M'_{[1]}(\ell_1) \\
[\![M']\!]_{\ell_2} &= M'_{[3]}(\ell_2) - M'_{[2]}(\ell_2)
\end{aligned}
\tag{2.121}
$$

Poichè si ha anche

$$\begin{aligned} M(L) &= M_{[3]}(L) \\ M'(L) &= M'_{[3]}(L) \end{aligned} \tag{2.122}$$

dalla (2.114) si ottiene la (2.100).

Si possono inoltre definire su ciascuno degli intervalli $[0,\ell_1]$, $[\ell_1,\ell_2]$, $[\ell_2,L]$ rispettivamente

$$\begin{aligned} v_{[1]}(\zeta) &:= \widetilde{v}(\zeta) \\ v_{[2]}(\zeta) &:= \widetilde{v}(\zeta) + \frac{1}{YJ}\left(\frac{1}{2}[\![M]\!]_{\ell_1}(\zeta-\ell_1)^2 + \frac{1}{6}[\![M']\!]_{\ell_1}(\zeta-\ell_1)^3\right) \\ v_{[3]}(\zeta) &:= \widetilde{v}(\zeta) + \frac{1}{YJ}\left(\frac{1}{2}[\![M]\!]_{\ell_1}(\zeta-\ell_1)^2 + \frac{1}{6}[\![M']\!]_{\ell_1}(\zeta-\ell_1)^3\right) \\ &\quad + \frac{1}{YJ}\left(\frac{1}{2}[\![M]\!]_{\ell_2}(\zeta-\ell_2)^2 + \frac{1}{6}[\![M']\!]_{\ell_2}(\zeta-\ell_2)^3\right) \end{aligned} \tag{2.123}$$

risultando

$$\begin{aligned} YJ\, v''_{[1]}(\zeta) &= M_{[1]}(\zeta) \\ YJ\, v''_{[2]}(\zeta) &= M_{[2]}(\zeta) \\ YJ\, v''_{[3]}(\zeta) &= M_{[3]}(\zeta) \end{aligned} \tag{2.124}$$

2.8 Equazioni del moto a tratti

Ponendo

$$\begin{aligned} p_{[i]}(\zeta,t) &:= -\rho A\, \ddot{v}_{[i]}(\zeta,t) \\ c_{[i]}(\zeta,t) &:= 0 \\ Q^+_{[3]} &:= -m_a\, \ddot{v}_{[3]}(L,t) \\ M^+_{[3]} &:= -m_a\, h_a^2\, \ddot{v}'_{[3]}(L,t) \end{aligned} \tag{2.125}$$

la (2.101) diventa

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\ell_1} \big(YJ\, v''''_{[1]}(\zeta,t) + \rho A\, \ddot v_{[1]}(\zeta,t)\big)\, w_{[1]}(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad + \int_{\ell_1}^{\ell_2} \big(YJ\, v''''_{[2]}(\zeta,t) + \rho A\, \ddot v_{[2]}(\zeta,t)\big)\, w_{[2]}(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad + \int_{\ell_2}^{L} \big(YJ\, v''''_{[3]}(\zeta,t) + \rho A\, \ddot v_{[1]}(\zeta,t)\big)\, w_{[3]}(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad - YJ\, \big(v'''_{[1]}(\ell_1,t) - v'''_{[2]}(\ell_1,t)\big)\, w_{[2]}(\ell_1) \\
&\quad - YJ\, \big(v'''_{[2]}(\ell_2,t) - v'''_{[3]}(\ell_2,t)\big)\, w_{[3]}(\ell_2) \\
&\quad + \big(N_p(t)\, h + YJ\, \big(v''_{[1]}(\ell_1,t) - v''_{[2]}(\ell_1,t)\big)\big)\, w'_{[2]}(\ell_1) \\
&\quad - \big(N_p(t)\, h - YJ\, \big(v''_{[2]}(\ell_2,t) - v''_{[3]}(\ell_2,t)\big)\big)\, w'_{[3]}(\ell_2) \\
&\quad - \big(-m_a\, \ddot v_{[3]}(L,t) + YJ\, v'''_{[3]}(L,t)\big)\, w_{[3]}(L) \\
&\quad + \big(m_a\, h_a^2\, \ddot v'_{[3]}(L,t) + YJ\, v''_{[3]}(L,t)\big)\, w'_{[3]}(L) = 0
\end{aligned} \tag{2.126}
$$

Corrispondentemente le (2.102), diventano

$$
\begin{aligned}
YJ\, v''''_{[1]}(\zeta,t) + \rho A\, \ddot v_{[1]}(\zeta,t) &= 0, \qquad 0 \le \zeta \le \ell_1 \\
YJ\, v''''_{[2]}(\zeta,t) + \rho A\, \ddot v_{[2]}(\zeta,t) &= 0, \qquad \ell_1 \le \zeta \le \ell_2 \\
YJ\, v''''_{[3]}(\zeta,t) + \rho A\, \ddot v_{[3]}(\zeta,t) &= 0, \qquad \ell_2 \le \zeta \le L
\end{aligned} \tag{2.127}
$$

con le condizioni al bordo (2.97) e

$$
\begin{aligned}
v'''_{[1]}(\ell_1,t) - v'''_{[2]}(\ell_1,t) &= 0 \\
v'''_{[2]}(\ell_2,t) - v'''_{[3]}(\ell_2,t) &= 0 \\
N_p(t)\, h + YJ\, \big(v''_{[1]}(\ell_1,t) - v''_{[2]}(\ell_1,t)\big) &= 0 \\
N_p(t)\, h - YJ\, \big(v''_{[2]}(\ell_2,t) - v''_{[3]}(\ell_2,t)\big) &= 0 \\
-m_a\, \ddot v_{[3]}(L,t) + YJ\, v'''_{[3]}(L,t) &= 0 \\
m_a\, h_a^2\, \ddot v'_{[3]}(L,t) + YJ\, v''_{[3]}(L,t) &= 0
\end{aligned} \tag{2.128}
$$

Le corrispondenti espressioni in termini di trasformate di Fourier sono

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\ell_1} \left(\mathrm{v}''''_{[1]}(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}_{[1]}(\zeta,\omega) \right) w_{[1]}(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad + \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left(\mathrm{v}''''_{[2]}(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}_{[2]}(\zeta,\omega) \right) w_{[2]}(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad + \int_{\ell_2}^{L} \left(\mathrm{v}''''_{[3]}(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}_{[1]}(\zeta,\omega) \right) w_{[3]}(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad - \big(\mathrm{v}'''_{[1]}(\ell_1,\omega) - \mathrm{v}'''_{[2]}(\ell_1,\omega) \big)\, w_{[2]}(\ell_1) \\
&\quad - \big(\mathrm{v}'''_{[2]}(\ell_2,\omega) - \mathrm{v}'''_{[3]}(\ell_2,\omega) \big)\, w_{[3]}(\ell_2) \\
&\quad + \big(M_p(\omega) + \big(\mathrm{v}''_{[1]}(\ell_1,\omega) - \mathrm{v}''_{[2]}(\ell_1,\omega) \big) \big)\, w'_{[2]}(\ell_1) \\
&\quad - \big(M_p(\omega) - \big(\mathrm{v}''_{[2]}(\ell_2,\omega) - \mathrm{v}''_{[3]}(\ell_2,\omega) \big) \big)\, w'_{[3]}(\ell_2) \\
&\quad - \left(\alpha_a\, \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}_{[3]}(L,\omega) + \mathrm{v}'''_{[3]}(L,\omega) \right) w_{[3]}(L) \\
&\quad + \left(-\gamma_a\, \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}'_{[3]}(L,\omega) + \mathrm{v}''_{[3]}(L,\omega) \right) w'_{[3]}(L) = 0
\end{aligned}
\tag{2.129}
$$

oppure

$$
\mathrm{v}''''_{[1]}(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}_{[1]}(\zeta,\omega) = 0, \qquad 0 \le \zeta \le \ell_1 \tag{2.130}
$$

$$
\mathrm{v}''''_{[2]}(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}_{[2]}(\zeta,\omega) = 0, \qquad \ell_1 \le \zeta \le \ell_2 \tag{2.131}
$$

$$
\mathrm{v}''''_{[3]}(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}_{[3]}(\zeta,\omega) = 0, \qquad \ell_2 \le \zeta \le L \tag{2.132}
$$

con le condizioni al bordo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{v}'''_{[1]}(\ell_1,\omega) - \mathrm{v}'''_{[2]}(\ell_1,\omega) &= 0 \\
\mathrm{v}'''_{[2]}(\ell_2,\omega) - \mathrm{v}'''_{[3]}(\ell_2,\omega) &= 0 \\
M_p(\omega) + \big(\mathrm{v}''_{[1]}(\ell_1,\omega) - \mathrm{v}''_{[2]}(\ell_1,\omega) \big) &= 0 \\
M_p(\omega) - \big(\mathrm{v}''_{[2]}(\ell_2,\omega) - \mathrm{v}''_{[3]}(\ell_2,\omega) \big) &= 0 \\
\alpha_a\, \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}_{[3]}(L,\omega) + \mathrm{v}'''_{[3]}(L,\omega) &= 0 \\
-\gamma_a\, \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}'_{[3]}(L,\omega) + \mathrm{v}''_{[3]}(L,\omega) &= 0
\end{aligned}
\tag{2.133}
$$

avendo posto

$$k^2 = \frac{YJ}{\rho A}, \quad \alpha_a = \frac{m_a}{\rho A}, \quad \gamma_a = \frac{m_a\, h_a^2}{\rho A} \tag{2.134}$$

e avendo indicato con $\mathrm{v}(\zeta,\omega)$ e $M_p(\omega)$ le trasformate di Fourier di $v(\zeta,t)$ e $N_p(t)\, h/YJ$.

2.9 Modi naturali a tratti

Si considerino al posto della (2.27) le equazioni (2.130), (2.131) e (2.132) con le condizioni al bordo omogenee

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_{[1]}'''(\ell_1,\omega) - \mathrm{v}_{[2]}'''(\ell_1,\omega) &= 0\\
\mathrm{v}_{[2]}'''(\ell_2,\omega) - \mathrm{v}_{[3]}'''(\ell_2,\omega) &= 0\\
\mathrm{v}_{[1]}''(\ell_1,\omega) - \mathrm{v}_{[2]}''(\ell_1,\omega) &= 0\\
\mathrm{v}_{[2]}''(\ell_2,\omega) - \mathrm{v}_{[3]}''(\ell_2,\omega) &= 0\\
\alpha_a \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}_{[3]}(L,\omega) + \mathrm{v}_{[3]}'''(L,\omega) &= 0\\
-\gamma_a \frac{\omega^2}{k^2}\, \mathrm{v}_{[3]}'(L,\omega) + \mathrm{v}_{[3]}''(L,\omega) &= 0
\end{aligned} \tag{2.135}$$

I *modi naturali* risultano ora descritti da tre funzioni

$$\phi_{[1]n}(\zeta), \qquad 0 \le \zeta \le \ell_1 \tag{2.136}$$

$$\phi_{[2]n}(\zeta), \qquad \ell_1 \le \zeta \le \ell_2 \tag{2.137}$$

$$\phi_{[3]n}(\zeta), \qquad \ell_2 \le \zeta \le L \tag{2.138}$$

I modi $\phi_n(\zeta)$ già considerati soddisfano per ogni tratto le equazioni (2.130), (2.131) e (2.132). Soddisfano anche le condizioni al bordo (2.135). Si può pertanto affermare che le funzioni (2.136), (2.137) e (2.138) non sono altro che una descrizione a tratti dei modi $\phi_n(\zeta)$. La proprietà di ortogonalità dei modi risulta essere solo una descrizione a tratti della (2.53).

Capitolo 3

Mensola con due attuatori piezoeletrici

3.1 Equazioni di bilancio

Per ogni atto di moto

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \big(Q' + p\big)\, w \, d\zeta + \int_0^L \big(M' + Q + c\big)\, w' \, d\zeta \\
&\quad + \big(Q^+ - Q(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- + Q(0)\big)\, w(0) \\
&\quad + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Dalle integrazioni per parti

$$\int_0^L M'w' \, d\zeta = -\int_0^L M''w \, d\zeta + M'(L)w(L) - M'(0)w(0) \tag{3.2}$$

$$\int_0^L Qw' \, d\zeta = -\int_0^L Q'w \, d\zeta + Q(L)w(L) - Q(0)w(0) \tag{3.3}$$

$$\int_0^L cw' \, d\zeta = -\int_0^L c'w \, d\zeta + c(L))w(L) - c(0))w(0) \tag{3.4}$$

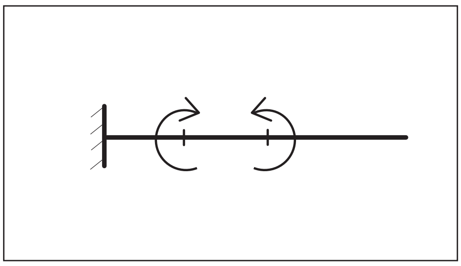

Figura 3.1: Mensola con due coppie opposte

si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \big(-M'' + p - c'\big)\, w \, d\zeta \\
&\quad + \big(Q^+ + M'(L) + c(L)\big)\, w(L) + \big(Q^- - M'(0) - c(0)\big)\, w(0) \\
&\quad + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) + \big(M^- + M(0)\big)\, w'(0) = 0
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Nel caso di una mensola è

$$
\boxed{v(0) = 0, \quad v'(0) = 0}
\tag{3.6}
$$

Per atti di moto compatibili con i vincoli la (3.5) diventa

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \big(-M'' + p - c'\big)\, w \, d\zeta \\
&\quad + \big(Q^+ + M'(L) + c(L)\big)\, w(L) + \big(M^+ - M(L)\big)\, w'(L) = 0
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Ne derivano le equazioni di bilancio

$$
\boxed{-M'' + p - c' = 0}
\tag{3.8}
$$

con le condizioni al bordo

$$
\boxed{
\begin{aligned}
Q^+ + M'(L) + c(L) &= 0 \\
M^+ - M(L) &= 0
\end{aligned}
}
\tag{3.9}
$$

Definendo la funzione di risposta in modo tale che

$$
M(\zeta) = YJ\, v''(\zeta)
\tag{3.10}
$$

alla (3.7) corrisponde

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \big(YJ\, v'''' - p + c'\big)\, w \, d\zeta \\
&\quad - \big(Q^+ + YJ\, v'''(L) + c(L)\big)\, w(L) - \big(M^+ - YJ\, v''(L)\big)\, w'(L) = 0
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

La (3.8) e le (3.9) diventano

$$
\boxed{YJv'''' - p + c' = 0}
\tag{3.12}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&YJ\, v'''(L) = -Q^+ + c(L) \\
&YJ\, v''(L) = M^+
\end{aligned}
}
\tag{3.13}
$$

a cui vanno aggiunte le (3.6).

3.2 Equazioni del moto

Ponendo

$$p(\zeta,t) := -\rho A\,\ddot{v}(L,t) \tag{3.14}$$
$$c(\zeta,t) := -N_p(t)\,h\,(\delta(\zeta-\ell_1)-\delta(\zeta-\ell_2)) \tag{3.15}$$
$$Q^+(t) := -m_a\,\ddot{v}(L,t) \tag{3.16}$$
$$M^+(t) := -m_a\,h_a^2\,\ddot{v}'(L,t) \tag{3.17}$$

la (3.11) diventa

$$\begin{aligned}&\int_0^L \Big(YJ\,v''''(\zeta,t)+\rho A\,\ddot{v}(\zeta,t)-N_p(t)\,h\,\big(\delta'(\zeta-\ell_1)-\delta'(\zeta-\ell_2)\big)\Big)\,w\,d\zeta\\ &\quad+\Big(m_a\,\ddot{v}(L,t)-YJ\,v'''(L,t)\Big)\,w(L)\\ &\quad+\Big(m_a\,h_a^2\,\ddot{v}'(L,t)+YJ\,v''(L,t)\Big)\,w'(L)=0\end{aligned} \tag{3.18}$$

Corrispondentemente la (3.12) diventa

$$YJ\,v''''(\zeta,t)+\rho A\,\ddot{v}(\zeta,t)-N_p(t)\,h\,\big(\delta'(\zeta-\ell_1)-\delta'(\zeta-\ell_2)\big)=0 \tag{3.19}$$

con le condizioni al bordo

$$v(0,t)=0,\quad v'(0,t)=0 \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}m_a\,\ddot{v}(L,t)-YJ\,v'''(L,t)&=0\\ m_a\,h_a^2\,\ddot{v}'(L,t)+YJ\,v''(L,t)&=0\end{aligned} \tag{3.21}$$

In termini di trasformate di Fourier

$$\mathrm{v}''''(\zeta,\omega)-\frac{\omega^2}{k^2}\,\mathrm{v}(\zeta,\omega)-M_p(\omega)\,\,\big(\delta'(\zeta-\ell_1)-\delta'(\zeta-\ell_2)\big)=0 \tag{3.22}$$

con le condizioni al bordo

$$\mathrm{v}(0,\omega)=0,\quad \mathrm{v}'(0,\omega)=0 \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{k^2}\,\alpha_a\,\mathrm{v}(L,\omega)+\mathrm{v}'''(L,\omega)&=0\\ -\frac{\omega^2}{k^2}\,\gamma_a\,\mathrm{v}'(L,\omega)+\mathrm{v}''(L,\omega)&=0\end{aligned} \tag{3.24}$$

avendo posto

$$k^2 = \frac{YJ}{\rho A}, \quad \alpha_a = \frac{m_a}{\rho A}, \quad \gamma_a = \frac{m_a\, h_a^2}{\rho A} \tag{3.25}$$

e avendo indicato con $\mathrm{v}(\zeta, \omega)$ e $M_p(\omega)$ le trasformate di Fourier di $v(\zeta, t)$ e $N_p(t)\, h/YJ$. La trasformata di Fourier della (3.18) è

$$\begin{aligned} &\int_0^L \Big(\mathrm{v}''''(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\,\mathrm{v}(\zeta,\omega) - M_p(\omega)\,\big(\delta'(\zeta-\ell_1) - \delta'(\zeta-\ell_2)\big)\Big)\, w\, d\zeta \\ &\quad - \Big(\frac{\omega^2}{k^2}\,\alpha_a\,\mathrm{v}(L,\omega) + \mathrm{v}'''(L,\omega)\Big)\, w(L) \\ &\quad + \Big(-\frac{\omega^2}{k^2}\,\gamma_a \mathrm{v}'(L,\omega) + \mathrm{v}''(L,\omega)\Big)\, w'(L) = 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

3.3 Modi naturali

Si consideri l'equazione

$$\mathrm{v}''''(\zeta,\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}\,\mathrm{v}(\zeta,\omega) = 0 \tag{3.27}$$

con le condizioni al bordo (3.23), (3.24). Riguardando tale equazione, per un valore fissato di ω, come una equazione differenziale in ζ, se ne consideri la forma normale

$$\mathbf{y}'(\zeta) = \mathbf{A}\mathbf{y}(\zeta) \tag{3.28}$$

con

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}(\omega,\zeta) \\ \mathrm{v}'(\omega,\zeta) \\ \mathrm{v}''(\omega,\zeta) \\ \mathrm{v}'''(\omega,\zeta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\omega^2}{k^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

La soluzione è

$$\mathbf{y}(\zeta) = e^{\mathbf{A}\zeta}\mathbf{y}_o \tag{3.30}$$

Per valutare l'esponenziale occorre ridurre la matrice $\mathbf{A}$ nella forma di Jordan. Gli autovalori si possono indicare con

$$\beta, \quad -\beta, \quad i\,\beta, \quad -i\,\beta \tag{3.31}$$

con $\beta > 0$ tale che

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{k^2} \tag{3.32}$$

Essendo gli autovalori distinti, la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. Disponendo gli autovettori per colonne

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} -1 & 1 & i & -i \\ \beta & \beta & -\beta & -\beta \\ -\beta^2 & \beta^2 & -i\,\beta^2 & i\,\beta^2 \\ \beta^3 & \beta^3 & \beta^3 & \beta^3 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

si ha

$$e^{\mathbf{A}\zeta} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} e^{\beta\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\beta\zeta} \end{pmatrix} \mathbf{T} \tag{3.34}$$

La prima riga di questa matrice risulta

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2} & \frac{\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta} & \frac{-\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2\,\beta^2} & \frac{-\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta^3} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Pertanto la espressione di $\mathrm{v}(\zeta,\omega)$ è data dal prodotto di tale riga per $\mathbf{y}_o$, i cui elementi sono delle costanti arbitrarie

$$\begin{aligned} \mathrm{v}(\zeta,\omega) = c_1(\omega)\frac{\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2} + c_2(\omega)\frac{\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta} \\ + c_3(\omega)\frac{-\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2\,\beta^2} + c_4(\omega)\frac{-\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta^3} \end{aligned} \tag{3.36}$$

Essendo

$$\begin{aligned} \mathrm{v}''(\zeta,\omega) = c_1(\omega)\frac{\beta^2\,(-\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta))}{2} + c_2(\omega)\frac{\beta\,(-\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta))}{2} \\ + c_3(\omega)\frac{\cos(\beta\zeta)+\cosh(\beta\zeta)}{2} + c_4(\omega)\frac{\sin(\beta\zeta)+\sinh(\beta\zeta)}{2\,\beta} \end{aligned} \tag{3.37}$$

le condizioni al bordo (3.23) implicano

$$c_3(\omega) = 0, \quad c_4(\omega) = 0 \tag{3.38}$$

La matrice delle condizioni al bordo (3.24) ha per prima colonna

$$\begin{pmatrix} -\alpha_a\beta\cos(L\beta) + \alpha_a\beta\cosh(L\beta) - \sin(L\beta) + \sinh(L\beta) \\ \cos(L\beta) + \cosh(L\beta) - \beta^3\gamma_a\sin(L\beta) - \beta^3\gamma_a\sinh(L\beta) \end{pmatrix}$$

e per seconda colonna

$$\begin{pmatrix} \cos(L\beta) + \cosh(L\beta) - \alpha_a\beta\sin(L\beta) + \alpha_a\beta\sinh(L\beta) \\ \beta^3\gamma_a\cos(L\beta) - \beta^3\gamma_a\cosh(L\beta) + \sin(L\beta) + \sinh(L\beta) \end{pmatrix}$$

Il determinante risulta

$$\begin{aligned} -2\Big(& 1 + \alpha_a\beta^4\gamma_a + \beta\left(\alpha_a - \beta^2\gamma_a\right)\cos(L\beta)\sinh(L\beta) \\ & - \cosh(L\beta)\left(\left(-1 + \alpha_a\beta^4\gamma_a\right)\cos(L\beta) + \beta\left(\alpha_a + \beta^2\gamma_a\right)\sin(L\beta)\right)\Big) \end{aligned} \tag{3.39}$$

Per calcolarne gli zeri, in forma approssimata, conviene dividere la espressione (3.39) per

$$-4\,\cosh(L\beta)\sqrt{\beta^2\left(\alpha_a + \beta^2\,\gamma_a\right)^2 + \left(-1 + \alpha_a\beta_a^4\,\gamma_a\right)^2} \tag{3.40}$$

Il grafico del determinante così scalato è riportato in Fig. 3.2. Indicando con β_n gli zeri del determinante, a ciascuno di questi corrisponde uno spazio nullo di dimensione uno per la matrice delle condizioni al bordo. Dalla (3.32) discende

$$\frac{\omega}{k} = \pm\beta^2 \tag{3.41}$$

Ponendo

$$\omega_n := \beta_n^2\,k \tag{3.42}$$

si ottiene infine per $\mathrm{v}(\zeta,\omega)$ la espressione

$$\mathrm{v}(\zeta,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(\zeta)\big(c(\omega_n)\delta(\omega-\omega_n) + c(-\omega_n)\delta(\omega+\omega_n)\big) \tag{3.43}$$

La trasformata inversa di Fourier della (3.43) risulta

$$\begin{aligned} v(\zeta,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{v}(\zeta,\omega)\,e^{-i\omega t}d\omega \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi_n(\zeta)\big(c(\omega_n)(\cos(\omega_n t) - i\sin(\omega_n t)) \\ &\qquad + c(-\omega_n)(\cos(\omega_n t) + i\sin(\omega_n t))\big) \end{aligned} \tag{3.44}$$

Riorganizzando i coefficienti la espressione precedente diventa

$$v(\zeta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(\zeta)\big(a_n\cos(\omega_n t) + b_n\sin(\omega_n t)\big) \tag{3.45}$$

Questa è la descrizione del moto corrispondente alle equazioni (3.27), (3.23), (3.24). Tale descrizione è stata ottenuta attraverso una selezione, indotta

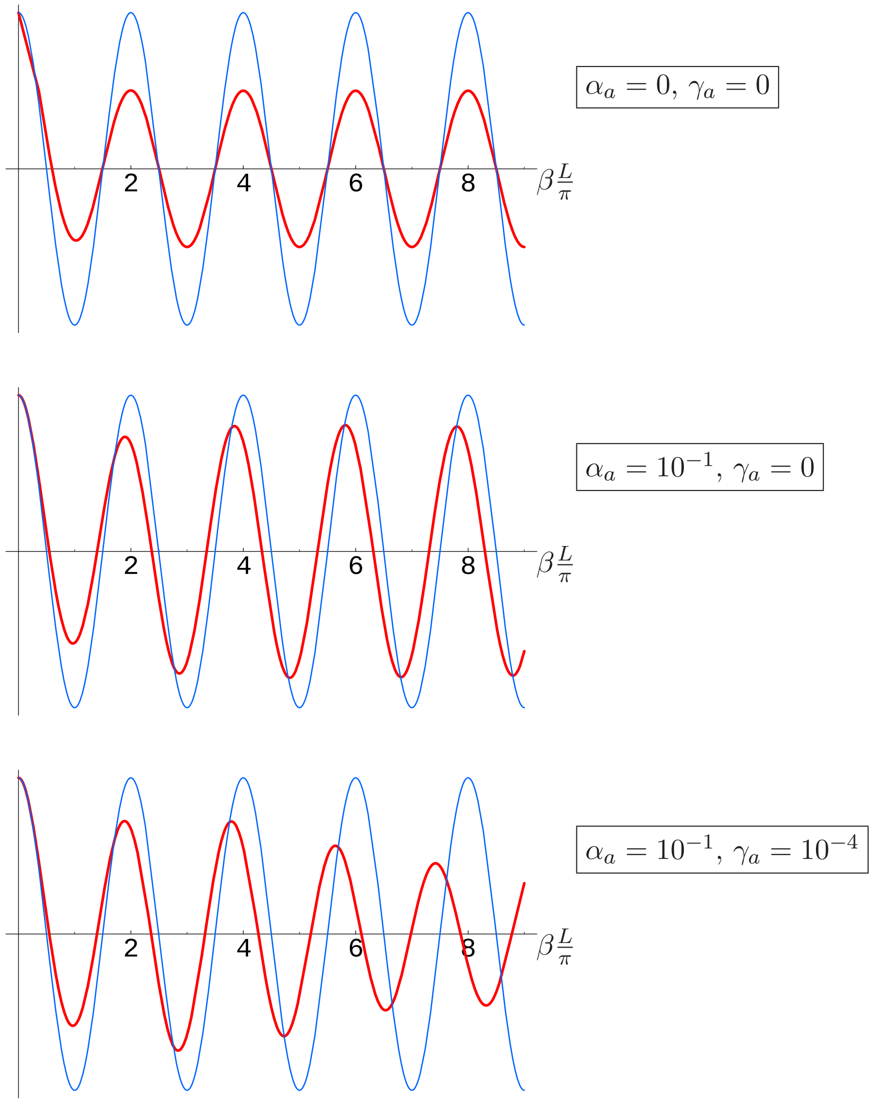

Figura 3.2: Grafico del determinante e di $\cos(L\beta)$

dalla condizioni al bordo, delle funzioni $e^{-i\omega t}$ utilizzate nella trasformata di Fourier.

Le funzioni $\phi_n(\zeta)$ si dicono *modi naturali*. Queste soddisfano la (3.27) con $\omega = \omega_n$, assieme alle condizioni al bordo (3.23) e (3.24). Si ha pertanto

$$\phi_n''''(\zeta) = \beta_n^4\, \phi_n(\zeta) \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} \phi_n(0) &= 0 \\ \phi_n'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} \beta_n^4\, \alpha_a\, \phi_n(L) + \phi_n'''(L) &= 0 \\ -\beta_n^4\, \gamma_a\, \phi_n'(L) + \phi_n''(L) &= 0 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Poiché la (3.27), con le (3.23), è equivalente alla parte omogenea della (3.26)

$$\begin{aligned} &\int_0^L \Big(\mathrm{v}''''(\zeta,\omega) - \beta^4\, \mathrm{v}(\zeta,\omega)\Big)\, w\, d\zeta \\ &\quad - \Big(\beta^4\, \alpha_a\, \mathrm{v}(L,\omega) + \mathrm{v}'''(L,\omega)\Big)\, w(L) \\ &\quad + \Big(-\beta^4\, \gamma_a \mathrm{v}'(L,\omega) + \mathrm{v}''(L,\omega)\Big)\, w'(L) = 0 \end{aligned} \tag{3.49}$$

le funzioni $\phi_n(\zeta)$ soddisfano tale condizione per qualsiasi w, con $\beta = \beta_n$. In particolare è dunque

$$\begin{aligned} &\int_0^L \Big(\phi_i''''(\zeta) - \beta_i^4\, \phi_i(\zeta)\Big)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta \\ &\quad - \Big(\beta_i^4\, \alpha_a\, \phi_i(L) + \phi_i'''(L)\Big)\, \phi_j(L) \\ &\quad + \Big(-\beta_i^4\, \gamma_a \phi_i'(L) + \phi_i''(L)\Big)\, \phi_j'(L) = 0 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Attraverso ripetute integrazioni per parti si ha

$$\begin{aligned} &\int_0^L \Big(\phi_j''''(\zeta) - \beta_i^4\, \phi_j(\zeta)\Big)\, \phi_i(\zeta)\, d\zeta \\ &\quad - \Big(\beta_i^4\, \alpha_a\, \phi_j(L) + \phi_j'''(L)\Big)\, \phi_i(L) \\ &\quad + \Big(-\beta_i^4\, \gamma_a \phi_j'(L) + \phi_j''(L)\Big)\, \phi_i'(L) = 0 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Sottraendo a questa la espressione ottenuta dalla (3.50) scambiando i con j,

$$\begin{aligned}\int_0^L &\Big(\phi_j''''(\zeta) - \beta_j^4\, \phi_j(\zeta)\Big)\, \phi_i(\zeta)\, d\zeta \\ &- \Big(\beta_j^4\, \alpha_a\, \phi_j(L) + \phi_j'''(L)\Big)\, \phi_i(L) \\ &+ \Big(-\beta_j^4\, \gamma_a \phi_j'(L) + \phi_j''(L)\Big)\, \phi_i'(L) = 0\end{aligned} \tag{3.52}$$

si ottiene

$$(\beta_j^4 - \beta_i^4)\Big(\int_0^L \phi_j(\zeta)\, \phi_i(\zeta)\, d\zeta + \alpha_a\, \phi_j(L)\, \phi_i(L) + \gamma_a \phi_j'(L)\, \phi_i'(L)\Big) = 0 \tag{3.53}$$

Questa è la proprietà di ortogonalità dei modi.

3.4 Parte singolare della soluzione

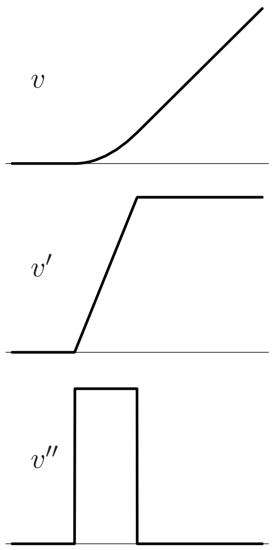

Figura 3.3: Soluzione statica

Nel caso in cui

$$p(\zeta) := 0 \tag{3.54}$$
$$c(\zeta) := -N_p\, h\, (\delta(\zeta - \ell_1) - \delta(\zeta - \ell_2)) \tag{3.55}$$
$$Q^+ := 0 \tag{3.56}$$
$$M^+ := 0 \tag{3.57}$$

la (3.12) diventa

$$YJv'''' - N_p\, h\, (\delta'(\zeta - \ell_1) - \delta'(\zeta - \ell_2) = 0 \tag{3.58}$$

con le condizioni al bordo

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0 \tag{3.59}$$
$$v'''(L) = 0, \quad v''(L) = 0 \tag{3.60}$$

Integrando la (3.58) si ottiene, per via delle (3.59) e (3.60),

$$v''''(\zeta) = \frac{N_p\, h}{YJ} \big(\delta'(\zeta - \ell_1) - \delta'(\zeta - \ell_2)\big) \tag{3.61}$$

$$v'''(\zeta) = \frac{N_p\, h}{YJ} \big(\delta(\zeta - \ell_1) - \delta(\zeta - \ell_2)\big) \tag{3.62}$$

$$v''(\zeta) = \frac{N_p\, h}{YJ} \big(\mathfrak{h}(\zeta - \ell_1) - (\zeta - \ell_2)\mathfrak{h}(\zeta - \ell_2)\big) \tag{3.63}$$

$$v'(\zeta) = \frac{N_p\, h}{YJ} \big((\zeta - \ell_1)\mathfrak{h}(\zeta - \ell_1) - (\zeta - \ell_2)\mathfrak{h}(\zeta - \ell_2)\big) \tag{3.64}$$

$$v(\zeta) = \frac{N_p\, h}{YJ} \Big(\frac{1}{2}(\zeta - \ell_1)^2\mathfrak{h}(\zeta - \ell_1) - \frac{1}{2}(\zeta - \ell_2)^2\mathfrak{h}(\zeta - \ell_2)\Big) \tag{3.65}$$

avendo indicato con $\mathfrak{h}$ la funzione di Heaviside. Dalla (3.65) risulta definita la funzione

$$\psi(\zeta) := \frac{1}{2}(\zeta - \ell_1)^2\mathfrak{h}(\zeta - \ell_1) - \frac{1}{2}(\zeta - \ell_2)^2\mathfrak{h}(\zeta - \ell_2) \tag{3.66}$$

che soddisfa le condizioni al bordo (3.59) e (3.60).

3.5 Funzione di trasferimento

In termini di trasformate di Fourier la descrizione del moto è data dalla equazione (3.26) con le condizioni al bordo (3.23). Definendo

$$\bar{\mathrm{v}}(\zeta, \omega) := M_p(\omega)\psi(\zeta) \tag{3.67}$$

si ponga

$$\mathrm{v}(\zeta, \omega) = \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega)\phi_i(\zeta) + \bar{\mathrm{v}}(\zeta, \omega) \tag{3.68}$$

In questo modo si descrive la parte regolare di $\mathrm{v}(\zeta, \omega)$

$$\mathrm{v}(\zeta, \omega) - \bar{\mathrm{v}}(\zeta, \omega) \tag{3.69}$$

come "combinazione lineare" dei modi. Sostituendo la espressione (3.68) nella (3.26) con $w = \phi_j$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \int_0^L \Big(\phi_i''''(\zeta) - \beta^4\, \phi_i(\zeta) \\
&\qquad - M_p(\omega)\, \big(\delta'(\zeta-\ell_1) - \delta'(\zeta-\ell_2)\big)\Big)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \Big(\beta^4\, \alpha_a\, \phi_i(L) + \phi_i'''(L) \Big)\, \phi_j(L) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \Big(-\beta^4\, \gamma_a\, \phi_i'(L) + \phi_i''(L) \Big)\, \phi_j'(L) \\
&\quad + \int_0^L \Big(\bar{\mathrm{v}}''''(\zeta,\omega) - \beta^4\, \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega) \Big)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad - \Big(\beta^4\, \alpha_a\, \bar{\mathrm{v}}(L,\omega) + \bar{\mathrm{v}}'''(L,\omega) \Big)\, \phi_j(L) \\
&\quad + \Big(-\beta^4\, \gamma_a\, \bar{\mathrm{v}}'(L,\omega) + \bar{\mathrm{v}}''(L,\omega) \Big)\, \phi_j'(L) = 0
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

Per la (3.67) e (3.60) questa espressione diventa

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \int_0^L \Big(\phi_i''''(\zeta) - \beta^4\, \phi_i(\zeta) \Big)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \Big(\beta^4\, \alpha_a\, \phi_i(L) + \phi_i'''(L) \Big)\, \phi_j(L) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} q_i(\omega) \Big(-\beta^4\, \gamma_a\, \phi_i'(L) + \phi_i''(L) \Big)\, \phi_j'(L) \\
&\quad - \beta^4 \Big(\int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta + \alpha_a\, \bar{\mathrm{v}}(L,\omega)\, \phi_j(L) + \gamma_a\, \bar{\mathrm{v}}'(L,\omega)\, \phi_j'(L) \Big) = 0
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

Per la (3.50) si ha

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} q_i(\omega)\,(\beta_i^4 - \beta^4)\,\Big(\int_0^L \phi_i(\zeta)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta \\
&\qquad + \alpha_a\,\phi_i(L)\,\phi_j(L) + \gamma_a\,\phi_i'(L)\,\phi_j'(L)\Big) \\
&\qquad - \beta^4\Big(\int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta + \alpha_a\,\bar{\mathrm{v}}(L,\omega)\,\phi_j(L) + \gamma_a\,\bar{\mathrm{v}}'(L,\omega)\,\phi_j'(L)\Big) = 0
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

che, per la proprietà di ortogonalità (3.53), diventa

$$
\begin{aligned}
&q_j(\omega)\,(\beta_j^4 - \beta^4)\,\Big(\int_0^L \phi_j(\zeta)^2\,d\zeta + \alpha_a\,\phi_j(L)^2 + \gamma_a\,\phi_j'(L)^2\Big) \\
&\qquad - \beta^4\Big(\int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta + \alpha_a\,\bar{\mathrm{v}}(L,\omega)\,\phi_j(L) + \gamma_a\,\bar{\mathrm{v}}'(L,\omega)\,\phi_j'(L)\Big) = 0
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

Si noti che per la (3.58) e la (3.67) è

$$
\int_0^L \bar{\mathrm{v}}''''(\zeta,\omega)\phi_j(\zeta)\,d\zeta = M_p(\omega)\int_0^L \big(\delta'(\zeta-\ell_1) - \delta'(\zeta-\ell_2)\big)\phi_j(\zeta)\,d\zeta \tag{3.74}
$$

con le (3.59) e (3.60). Integrando per parti si ha per le (3.48)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \bar{\mathrm{v}}''''(\zeta,\omega)\phi_j(\zeta)\,d\zeta \\
&\quad = \int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\phi_j''''(\zeta)\,d\zeta + \beta_j^4\big(\alpha_a\bar{\mathrm{v}}(L,\omega)\phi(L) + \gamma_a\bar{\mathrm{v}}'(L,\omega)\phi_j'(L)\big)
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

Essendo poi $\phi_j'''' = \beta_j\,\phi_j$, dalla precedente si ha

$$
\begin{aligned}
&\beta_j^4\Big(\int_0^L \bar{\mathrm{v}}(\zeta,\omega)\phi_j(\zeta)\,d\zeta + \alpha_a\bar{\mathrm{v}}(L,\omega)\phi_j(L) + \gamma_a\bar{\mathrm{v}}'(L,\omega)\phi_j'(L)\Big) \\
&\quad = M_p(\omega)\int_0^L \big(\delta'(\zeta-\ell_1) - \delta'(\zeta-\ell_2)\big)\phi_j(\zeta)\,d\zeta \\
&\quad = M_p(\omega)\big(\phi_j'(\ell_2) - \phi_j'(\ell_1)\big)
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

La (3.73) diventa pertanto

$$
\begin{aligned}
&q_j(\omega)\,(\beta_j^4 - \beta^4)\,\Big(\int_0^L \phi_j(\zeta)^2\,d\zeta + \alpha_a\,\phi_j(L)^2 + \gamma_a\,\phi_j'(L)^2\Big) \\
&\quad = \frac{\beta^4}{\beta_j^4} M_p(\omega)\big(\phi_j'(\ell_2) - \phi_j'(\ell_1)\big)
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

Ponendo

$$\mu_j := \frac{1}{k^2}\Big(\int_0^L \phi_j(\zeta)^2\, d\zeta + \alpha_a\, \phi_j(L)^2 + \gamma_a\, \phi_j'(L)^2\Big) \tag{3.78}$$

la (3.77) si scrive

$$q_j(\omega)\left(\omega_j^2 - \omega^2\right)\mu_j = \frac{\omega^2}{\omega_j^2} M_p(\omega)\big(\phi_j'(\ell_2) - \phi_j'(\ell_1)\big) \tag{3.79}$$

da cui si ottiene

$$\boxed{q_j(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_j^2(\omega_j^2 - \omega^2)\mu_j}\, M_p(\omega)\big(\phi_j'(\ell_2) - \phi_j'(\ell_1)\big)} \tag{3.80}$$

Sostituendo questa espressione nella (3.68) si ottiene

$$\mathrm{v}(\zeta,\omega) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\omega^2}{\omega_i^2\left(\omega_i^2 - \omega^2\right)\mu_i}\left(\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)\right)\phi_i(\zeta) + \psi(\zeta)\right) M_p(\omega) \tag{3.81}$$

La funzione di trasferimento risulta dunque

$$\boxed{H(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega^2}{\omega_i^2\left(\omega_i^2 - \omega^2\right)\mu_i}\left(\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)\right)\phi_i(\zeta) + \psi(\zeta)} \tag{3.82}$$

Se si utilizza per $\mathrm{v}(\zeta,\omega)$, invece della espressione (3.68), la espressione

$$\breve{\mathrm{v}}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega)\phi_i(\zeta) \tag{3.83}$$

dalla (3.26), con $w = \phi_j$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega) \int_0^L \Big(\phi_i''''(\zeta) - \beta^4\, \phi_i(\zeta) \\
&\qquad - M_p(\omega)\left(\delta'(\zeta - \ell_1) - \delta'(\zeta - \ell_2)\right)\Big)\, \phi_j(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega)\Big(\beta^4\, \alpha_a\, \phi_i(L) + \phi_i'''(L)\Big)\, \phi_j(L) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega)\Big(- \beta^4\, \gamma_a\, \phi_i'(L) + \phi_i''(L)\Big)\, \phi_j'(L) = 0
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Per la (3.50) si ha

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \breve{q}_i(\omega)(\beta_i^4 - \beta^4)\Big(\int_0^L \phi_i(\zeta)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta \\
&\quad + \alpha_a\,\phi_i(L)\,\phi_j(L) + \gamma_a\,\phi_i'(L)\,\phi_j'(L)\Big) \\
&\quad - M_p(\omega)\int_0^L \big(\delta'(\zeta-\ell_1) - \delta'(\zeta-\ell_2)\big)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta = 0
\end{aligned}
\tag{3.85}
$$

che, per la proprietà di ortogonalità (3.53), diventa

$$
\begin{aligned}
&\breve{q}_j(\omega)\,\big(\beta_j^4 - \beta^4\big)\,\Big(\int_0^L \phi_j(\zeta)^2\,d\zeta + \alpha_a\,\phi_j(L)^2 + \gamma_a\,\phi_j'(L)^2\Big) \\
&- M_p(\omega)\int_0^L \big(\delta'(\zeta-\ell_1) - \delta'(\zeta-\ell_2)\big)\,\phi_j(\zeta)\,d\zeta = 0
\end{aligned}
\tag{3.86}
$$

Si ottiene infine

$$
\boxed{\breve{q}_j(\omega) = \frac{1}{(\omega_j^2 - \omega^2)\mu_j}\,M_p(\omega)\,\big(\phi_j'(\ell_2) - \phi_j'(\ell_1)\big)}
\tag{3.87}
$$

e corrispondentemente

$$
\breve{\mathrm{v}}(\zeta,\omega) = \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\left(\omega_i^2 - \omega^2\right)\mu_i}\,\big(\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)\big)\phi_i(\zeta)\right) M_p(\omega)
\tag{3.88}
$$

La funzione di trasferimento risulta in questo caso

$$
\boxed{\breve{H}(\zeta,\omega) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\left(\omega_i^2 - \omega^2\right)\mu_i}\,\big(\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)\big)\phi_i(\zeta)}
\tag{3.89}
$$

La differenza tra le due espressioni della funzione di trasferimento è

$$
H(\zeta,\omega) - \breve{H}(\zeta,\omega) = \psi(\zeta) - \sum_{i=1}^{N}\frac{\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)}{\omega_i^2\mu_i}\,\phi_i(\zeta)
\tag{3.90}
$$

È interessante interpretarne il significato. Si noti che la (3.76) implica

$$
\begin{aligned}
&\beta_j^4\Big(\int_0^L \psi(\zeta)\phi_j(\zeta)\,d\zeta + \alpha_a\psi(L)\phi_j(L) + \gamma_a\psi'(L)\phi_j'(L)\Big) \\
&= \big(\phi_j'(\ell_2) - \phi_j'(\ell_1)\big)
\end{aligned}
\tag{3.91}
$$

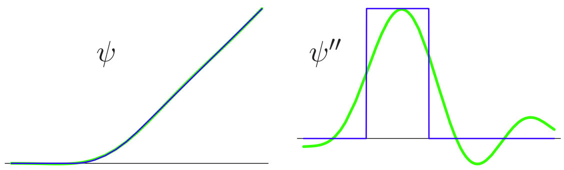

Figura 3.4: Approssimazione regolare della soluzione statica con 5 modi

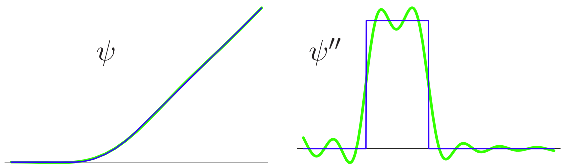

Figura 3.5: Approssimazione regolare della soluzione statica con 15 modi

Poichè per la ortogonalità dei modi

$$\psi(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_0^L \psi(\zeta)\phi_i(\zeta)\, d\zeta + \alpha_a \psi(L)\phi_i(L) + \gamma_a \psi'(L)\phi_i'(L)}{\int_0^L \phi_i(\zeta)^2\, d\zeta + \alpha_a \psi(L)^2 + \gamma_a \psi'(L)^2}\, \phi_i(\zeta) \tag{3.92}$$

risulta

$$\psi(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)}{\beta_i^4 \int_0^L \phi_i(\zeta)^2\, d\zeta}\, \phi_i(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)}{\omega_i^2\, \mu_i}\, \phi_i(\zeta) \tag{3.93}$$

Pertanto dalla (3.90) si ha

$$H(\zeta,\omega) - \breve{H}(\zeta,\omega) = \sum_{i=N}^{\infty} \frac{\phi_i'(\ell_2) - \phi_i'(\ell_1)}{\omega_i^2 \mu_i}\, \phi_i(\zeta) \tag{3.94}$$

La differenza tra le funzioni di trasferimento consiste dunque nel resto della serie (3.93) troncata ai primi N termini. Si noti che tale differenza non dipende da ω. È anche utile rilevare che, dal confronto della (3.80) con la (3.87), risulta

$$q_j(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\, \breve{q}_j(\omega) \tag{3.95}$$

In Fig. 3.4 e Fig. 3.5 è riportato il grafico di $\psi(\zeta)$ assieme al grafico della espressione data dalla serie (3.93) troncata rispettivamente ai primi 5 termini o ai primi 15 termini.