## Basi di Hessenberg

Sia $A$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ definto su $\mathbb{R}$ e dotato di prodotto interno. Sia $\{b_1 \dots b_n\}$ una base ortonormale di $\mathcal{U}$.

Si mostra come è possibile costruire una base ortonormale di $\mathcal{U}$ attraverso una successione di rotazioni dei vettori della base originaria in modo tale che la matrice di $A$ risulti avere la forma seguente

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

essendo $a_{ij} = 0, i > j+1$. Una base in cui la matrice di $A$ ha tale proprietà si dice *base di Hessenberg*.

Considerando per primo il vettore $Ab_1$, si modifichi la base di $\mathcal{U}$ eseguendo:

- (2.3) una rotazione nel sottospazio generato dal *secondo* e dal *terzo* vettore della base, in modo che il *terzo* vettore diventi ortogonale al vettore $Ab_1$;
- (2.4) una rotazione nel sottospazio generato dal *secondo* e dal *quarto* vettore della base appena ottenuta, in modo che il *quarto* vettore diventi ortogonale al vettore $Ab_1$;
- $(\dots)$ $\dots$
- $(2.n)$ una rotazione nel sottospazio generato dal *secondo* e dall'*$n$–esimo* vettore dell'ultima base ottenuta, in modo che il vettore *$n$–esimo* diventi ortogonale al vettore $Ab_1$.

Si ottiene in tal modo una base caratterizzata dal fatto che il *primo* vettore è rimasto immutato mentre i vettori dal *terzo* in poi risultano ortogonali al vettore $Ab_1$. La *prima* colonna della matrice di $A$ avrà pertanto elementi nulli al di sotto della *seconda* riga.

Si consideri poi il vettore $Ab_2$ e si modifichi la base eseguendo:

- (3.4) una rotazione nel sottospazio generato dal *terzo* e dal *quarto* vettore della base, in modo che il *quarto* vettore diventi ortogonale al vettore $Ab_2$;
- (3.5) una rotazione nel sottospazio generato dal *terzo* e dal *quinto* vettore della base appena ottenuta, in modo che il *quinto* vettore diventi ortogonale al vettore $Ab_2$;
- $(\dots)$ $\dots$
- $(3.n)$ una rotazione nel sottospazio generato dal *terzo* e dall'*$n$–esimo* vettore dell'ultima base ottenuta, in modo che il vettore *$n$–esimo* diventi ortogonale al vettore $Ab_2$.

Si ottiene in tal modo una base caratterizzata dal fatto che i *primi due* vettori sono rimasti immutati mentre i vettori dal *quarto* in poi risultano ortogonali al vettore $Ab_2$. Il vettore $Ab_2$ appartiene dunque al sottospazio generato dai *primi tre* vettori della base. La *seconda* colonna della matrice di $A$ avrà pertanto elementi nulli al di sotto della *terza* riga.

Proseguendo si ottiene infine una matrice tale che $a_{ij} = 0, i > j+1$.

Una notevole proprietà di una base di Hessenberg $\{b_1 \dots b_n\}$ consiste nel fatto che, applicando un algoritmo di ortogonalizzazione ai vettori $\{Ab_1 \dots Ab_n\}$, si ottiene ancora una base di Hessenberg.

Si osservi infatti che la base $\{\acute{b}_1 \dots \acute{b}_n\}$ costruita dalla fattorizzazione di Givens è ottenuta da una base di Hessenberg $\{b_1 \dots b_n\}$ attraverso

(1) una rotazione nel sottospazio generato dal *primo* e dal *secondo* vettore, in modo che quest'utimo diventi ortogonale a $Ab_1$;

(2) una rotazione nel sottospazio generato dal *secondo* e dal *terzo* vettore, in modo che quest'ultimo diventi ortogonale a $Ab_2$;

(...) ...

($n$–1) una rotazione nel sottospazio generato dal *penultimo* e dall'*ultimo* vettore, in modo che l'ultimo diventi ortogonale a $Ab_2$.

Da tale descrizione deriva che

$$\begin{aligned}
\acute{b}_1 &= v_{11} b_1 + v_{21} b_2 \\
\acute{b}_2 &= v_{12} b_1 + v_{22} b_2 + v_{32} b_3 \\
\dots & \\
\acute{b}_n &= v_{1n} b_1 + v_{2n} b_2 + v_{3n} b_3 + \ldots + v_{nn} b_n
\end{aligned}$$

La base costruita è caratterizzata inoltre dal fatto che

$$i > k \quad \Rightarrow \quad \langle Ab_k \, , \acute{b}_i \rangle = 0$$

essendo questa una conseguenza della fattorizzazione di Givens in generale. Risulta pertanto

$$i > j+1 \quad \Rightarrow \quad \langle A\acute{b}_j \, , \acute{b}_i \rangle = \sum_{k=1}^{j+1} v_{kj} \langle Ab_k \, , \acute{b}_i \rangle = 0$$

Essendo gli elementi $\acute{a}_{ij}$ della matrice di $A$ nella base $\{\acute{b}_1 \ldots \acute{b}_n\}$ tali che

$$i > j+1 \quad \Rightarrow \quad \acute{a}_{ij} = \langle A\acute{b}_j \, , \acute{b}_i \rangle = 0$$

la nuova base è dunque ancora una base di Hessenberg.

Questa proprietà è molto importante nella realizzazione dell'algoritmo QR, poiché la preliminare costruzione di una base di Hessenberg assicura che tutte le basi generate successivamente siano anch'esse basi di Hessenberg. Il numero di rotazioni necessarie per ogni fattorizzazione di Givens risulta in tal caso $(n-1)$ invece che $n(n-1)/2$.