

Algoritmi di ortogonalizzazione

Si consideri un isomorfismo $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ tra due spazi vettoriali definiti su \mathbb{R} . Lo spazio \mathcal{V} sia inoltre dotato di prodotto interno.

Sia $\{b_1 \dots b_n\}$ una base di \mathcal{U} e $\{d_1 \dots d_n\}$ una base ortonormale di \mathcal{V} e \mathbf{A} la corrispondente matrice di A .

Si mostra quale relazione esiste tra la base ortonormale di \mathcal{V} generata applicando la *ortogonalizzazione di Schmidt* ai vettori $\{Ab_1 \dots Ab_n\}$ e le basi ortonormali generate applicando la *fattorizzazione di Givens* e la *fattorizzazione di Householder* alla matrice \mathbf{A} .

Essendo A un isomorfismo, la famiglia di vettori $\{Ab_1 \dots Ab_n\}$ è una base di \mathcal{V} . Ponendo

$$g_{ij} := \langle Ab_i, Ab_j \rangle$$

la matrice \mathbf{G} costituita dai termini g_{ij} risulta definita positiva e tale che

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

Si può dunque, attraverso la ortogonalizzazione di Schmidt, costruire una base ortonormale a partire dai vettori $\{Ab_1 \dots Ab_n\}$. L'algoritmo di Cholesky fornisce le componenti della base $\{Ab_1 \dots Ab_n\}$ rispetto alla nuova base ortonormale. Indicando con $\tilde{\mathbf{U}}$ la matrice che ha per colonne tali componenti, si ha

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{U}}$$

essendo $\tilde{\mathbf{Q}}$ la matrice delle componenti della nuova base ortonormale rispetto alla base $\{d_1 \dots d_n\}$ di \mathcal{V} . Indicando con

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{U}$$

la relazione tra le matrici di A corrispondente alla fattorizzazione di Givens o alla fattorizzazione di Householder, risulta

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$$

Applicando l'algoritmo di Cholesky si ottiene

$$j < i \quad \tilde{u}_{ji} = u_{ji} \frac{u_{jj}}{|u_{jj}|}$$

$$\tilde{u}_{ii} = |u_{ii}|$$

Risulta dunque

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

con $s_{ii} := u_{ii}/|u_{ii}|$. Questo implica che le basi costruite attraverso la fattorizzazione di Givens e la fattorizzazione di Householder possono essere ottenute dalla base costruita con la ortogonalizzazione di Schmidt semplicemente sostituendo alcuni vettori con i loro opposti.

Gli algoritmi di fattorizzazione di Givens e di Householder possono dunque essere visti come algoritmi di ortogonalizzazione applicati ai vettori $\{Ab_1 \dots Ab_n\}$. Più in generale essi possono essere applicati ad una qualunque famiglia di vettori di \mathcal{V} .