Iterazione inversa

Sia A un automorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ definito su $\mathbb{C}$ e dotato di prodotto interno. La decomposizione spettrale di A sia

$$A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$$

e la corrispondente decomposizione di $\mathcal{U}$ nella somma di autospazi sia

$$\mathcal{U} = \mathrm{U}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{U}_{\lambda_r}$$

Si osservi che

$$A^{-1} = \lambda_1^{-1} P_1 + \ldots + \lambda_r^{-1} P_r$$

Infatti

$$A^{-1} A = \lambda_1^{-1} \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r^{-1} \lambda_r P_r = P_1 + \ldots + P_r = I$$

Gli autovalori dell'endomorfismo A^{-1} sono dunque gli inversi degli autovalori di A, e l'autospazio corrispondente all'autovalore λ_i^{-1} risulta essere $\operatorname{im} P_i = \mathrm{U}_{\lambda_i}$.
Si assuma che esista un autovalore di A, che si indicherà con λ_r, tale che

$$|\lambda_r| < |\lambda_{r-1}| \leq |\lambda_i| \quad i < r-1$$

Dalla decomposizione spettrale di A^{-1} si ottiene, per ogni intero positivo k,

$$A^{-k} = \lambda_r^{-k} \Big(P_r + \Big(\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r} \Big)^{-k} P_{r-1} + \ldots + \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_r} \Big)^{k-1} P_1 \Big)$$

e quindi

$$\lim_{k \to \infty} \Big(\frac{1}{\lambda_r} A \Big)^{-k} = P_r$$

Si possono utilizzare queste proprietà per definire un algoritmo che generi una successione di vettori che abbia come *insieme attrattore* un sottospazio di U_{λ_r}, ed una successione di scalari il cui limite sia λ_r.
Assegnato un vettore u si costruisca la successione

$$\begin{aligned}
u^{(0)} &:= u / \|u\| \\
v^{(1)} &:= A^{-1} u^{(0)} \\
u^{(1)} &:= v^{(1)} / \|v^{(1)}\| \\
&\ldots \\
v^{(k)} &:= A^{-1} u^{(k-1)} \\
u^{(k)} &:= v^{(k)} / \|v^{(k)}\|
\end{aligned}$$

È semplice dimostrare che se $P_r u \neq o$, allora

$$\lim_{k \to \infty} \|(I - P_r) u^{(k)}\| = 0$$

Si costruisca poi la successione

$$\eta^{(k)} := \langle \mathrm{v}^{(k)} \,, u^{(k-1)} \rangle$$

È semplice dimostrare che

$$\lim_{k\to\infty} \eta^{(k)} = \lambda_r^{-1} \frac{\langle u_r \,, u_r \rangle}{\|u_r\|^2}$$

Si noti infine che

$$\begin{aligned}
(I - P_r)u^{(k)} &= \frac{\lambda_1^{-k}}{\|A^{-k}u\|}(I - P_r)\Big(\frac{1}{\lambda_r}A\Big)^{-k} u \\
&= \frac{\lambda_1^{-k}}{\|A^{-k}u\|}(I - P_r)\Big(u_r + \Big(\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}\Big)^{-k} u_{r-1} + \ldots + \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_r}\Big)^{-k} u_1\Big) \\
&= \frac{\lambda_1^{-k}}{\|A^{-k}u\|}\Big(\Big(\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}\Big)^{-k} u_{r-1} + \ldots + \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_r}\Big)^{-k} u_1\Big)
\end{aligned}$$

$$\|(I - P_1)u^{(k)}\| \le \frac{\lambda_1^{-k}}{\|A^{-k}u\|}\left|\frac{\lambda_r}{\lambda_{r-1}}\right|^k \|u_{r-1} + \ldots + u_1\| = \|u - u_r\| \frac{\lambda_1^{-k}}{\|A^{-k}u\|}\left|\frac{\lambda_r}{\lambda_{r-1}}\right|^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \|(I - P_1)u^{(k)}\| = \frac{\|u - u_r\|}{\|u_r\|} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\lambda_r}{\lambda_{r-1}}\right|^k$$

Pertanto i vettori $u^{(k)}$ si avvicinano a U_{λ_r} tanto più rapidamente quanto più piccolo è il rapporto $|\lambda_r/\lambda_{r-1}|$.

L'uso dell'algoritmo descritto va oltre il semplice calcolo di λ_r e di un autovettore corrispondente.

Si osservi infatti che, assegnato uno scalare $p \in \mathbb{C}$, risulta definito l'endomorfismo $B := (A - pI)$, la cui decomposizione spettrale risulta

$$\begin{aligned}
B = A - pI &= (\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r) - p(P_1 + \ldots + P_r) \\
&= (\lambda_1 - p)P_1 + \ldots + (\lambda_r - p)P_r
\end{aligned}$$

Indicando con μ_i gli autovalori di B si ha dunque

$$\mu_i = \lambda_i - p$$

Applicando l'algoritmo prima definito, si costruisca la successione

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}^{(k)} &:= B^{-1} u^{(k-1)} \\
u^{(k)} &:= \mathrm{v}^{(k)} / \|\mathrm{v}^{(k)}\|
\end{aligned}$$

Supponendo che p sia tale che tra gli autovalori di B ne esista uno, che si indicherà con μ_m, tale che

$$|\mu_m| < |\mu_i| \quad i \neq m$$

allora la successione di vettori $u^{(k)}$ ha come insieme attrattore un sottospazio di dimensione 1 dell'autospazio $\operatorname{im} P_m = \mathrm{U}_{\lambda_m}$.

Procedendo in questo modo, per un assegnato valore di p, si costruisce dunque una successione di vettori che ha come insieme attrattore un sottospazio di dimensione 1 dell'autospazio di A corrispondente all'autovalore più vicino a p. Si noti poi che, quanto più p è vicino ad un autovalore di A, tanto più piccolo è il rapporto $|\mu_m/\mu_{m-1}|$. Questo permette di migliorare le proprietà di convergenza e di affrontare efficacemente il caso di autovalori molto vicini o uguali in modulo.

Allo scalare p si dà il nome di *shift*.