Metodo delle potenze per endomorfismi non diagonalizzabili

Sia A un generico endomorfismo di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ definito su $\mathbb{C}$ e dotato di prodotto interno. Sia

$$\mathcal{U} = \mathrm{V}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{V}_{\lambda_r}$$

la decomposizione di $\mathcal{U}$ in autospazi generalizzati e

$$A = A_1 + \ldots + A_r$$

la corrispondente decomposizione spettrale di A, avendo posto $A_i := AP_i$, dove P_i è la proiezione canonica su V_{λ_i}.
Si dimostra che, se[1]

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \quad i \neq 1$$

ogni successione generata dal *metodo delle potenze* ha come spazio attrattore un sottospazio di V_{λ_1} di dimensione 1, purché il vettore u da cui trae origine sia tale che $P_1 u \neq o$.
Si osservi infatti che, per la invarianza dei sottospazi V_{λ_i}, si ha

$$A^k = A_1^k + \ldots + A_r^k$$

Esprimendo ciascun endomorfismo A_i come somma di un endomorfismo diagonalizzabile $S_i := \lambda_i P_i$ e di un endomorfismo nilpotente $N_i := (A_i - \lambda_i P_i)$, si ha

$$A_i^k = (\lambda_i P_i + N_i)^k = (\lambda_i I + N_i)^k P_i$$

Indicando con μ_i l'indice di nilpotenza di N_i, per le potenze del binomio $(\alpha_i I + \beta_i N_i)$ si ha, con k sufficientemente grande,

$$(\alpha_i I + \beta_i N_i)^k = \binom{k}{0} \alpha_i^k I + \binom{k}{1} \alpha_i^{k-1} \beta_i N_i + \binom{k}{2} \alpha_i^{k-2} \beta_i^2 N_i^2$$

$$+ \ldots + \binom{k}{q_i - 1} \alpha_i^{k-\mu_i+1} \beta_i^{\mu_i-1} N_i^{\mu_i-1}$$

dove ciascun coefficiente binomiale $\binom{k}{h}$ è un polinomio in k di grado h.
Nel caso in cui $A_1 = \lambda_1 P_1$, ovvero $\mu_1 = 1$, si osservi che

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} A \right)^k = P_1 + \sum_{i=2}^{r} (\alpha_i I + \beta_i N_i)^k P_i$$

con $\alpha_i := \lambda_i / \lambda_1$ e $\beta_i := 1/\lambda_1$. Risulta dunque

$$|\alpha_i| < 1 \quad \Rightarrow \quad \{\forall h < k \quad \lim_{k \to \infty} \binom{k}{h} \alpha_i^{k-h} = 0\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{\lambda_1} A \right)^k = P_1$$

[1] L'esclusione del caso $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ non è di fatto limitativa, potendosi in tal caso utilizzare un opportuno *shift* p tale che $|\lambda_1 - p| \neq |\lambda_2 - p|$.

Nel caso in cui $\mu_1 > 1$, si ha

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1}A\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(\binom{k}{0}I + \binom{k}{1}\beta_1 N_1 + \binom{k}{2}\beta_1^2 N_1^2 + \ldots + \binom{k}{\mu_1 - 1}\beta_1^{\mu_1-1}N_1^{\mu_1-1}\right)P_1$$

La successione di vettori $u^{(k)}$ generata dal *metodo delle potenze*, a partire da un vettore u tale che $P_1 u \neq o$, ha dunque in generale come insieme attrattore un sottospazio di V_{λ_1}.

Si osservi inoltre che, per ogni successione che trae origine da un particolare vettore u tale che $P_1 u \neq o$, l'indice di nilpotenza della restrizione di N_1 al sottospazio ciclico generato da $P_1 u$ risulterà $q_1 \leq \mu_1$. Considerando la restrizione della precedente espressione a tale sottospazio ciclico, il termine più a destra avrà esponente $(q_1 - 1)$. Essendo questo il termine prevalente, nel senso che

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1}A\right)^k \frac{1}{\binom{k}{q_1-1}} = \beta_1^{q_1-1}N_1^{q_1-1}P_1$$

l'insieme attrattore risulterà essere il sottospazio generato da

$$N_1^{q_1-1}P_1 u$$

Tale sottospazio è contenuto in $\mathrm{U}_{\lambda_1} := \ker(A - \lambda_1 I)$ poiché

$$(A - \lambda_1 I)N_1^{q_1-1}P_1 u = N_1^{q_1}P_1 u = o.$$

Si può dunque concludere che in generale l'insieme attrattore è un sottospazio di dimensione 1 dell'autospazio $\mathrm{U}_{\lambda_1} \subset \mathrm{V}_{\lambda_1}$.

Per la successione

$$\eta^{(k+1)} := \langle A u^{(k)}, u^{(k)}\rangle = \frac{1}{\|A^k u\|^2}\langle A^{k+1}u, A^k u\rangle$$

risulta pertanto

$$\lim_{k\to\infty}\eta^{(k)} = \frac{1}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\langle A\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1\rangle = \lambda_1\frac{\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}$$

essendo v_1 un vettore di U_{λ_1}.