Metodo delle potenze

Sia A un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ definito su $\mathbb{C}$ e dotato di prodotto interno. La decomposizione spettrale di A sia

$$A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$$

e la corrispondente decomposizione di $\mathcal{U}$ nella somma di autospazi sia

$$\mathcal{U} = \mathrm{U}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{U}_{\lambda_r}$$

Si osservi che, essendo $P_i P_j = O$ e $P_i P_i = P_i$, si ha, per ogni intero positivo k,

$$A^k = \lambda_1^k P_1 + \ldots + \lambda_r^k P_r$$

e quindi, $\forall u \in \mathcal{U}$

$$A^k u = \lambda_1^k u_1 + \ldots + \lambda_r^k u_r$$

avendo posto $u_i := P_i u$.
Si assuma che esista un autovalore, che si indicherà con λ_1, tale che

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_i| \quad i > 2$$

Dalla espressione precedente si ottiene

$$A^k u = \lambda_1^k \left(u_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k u_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)^k u_r \right)$$

e quindi, supponendo che $\mathcal{U}$ sia dotato di norma[1] ,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^k} A^k u = u_1$$

ovvero, più in generale, utilizzando la decomposizione spettrale di A^k e riferendosi alla norma degli endomorfismi di $\mathcal{U}$,

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\lambda_1} A\right)^k = P_1$$

Si possono utilizzare queste proprietà per definire un algoritmo che generi una successione di vettori che abbia come *insieme attrattore* un sottospazio di U_{λ_1}, ed una successione di scalari il cui limite sia λ_1.

Si dirà che un sottospazio U è *l'insieme attrattore* di una successione di vettori $u^{(k)}$ in $\mathcal{U}$ se è il sottospazio di dimensione minima tale che la proiezione di $u^{(k)}$ su un qualsiasi complemento di U tende al vettore nullo.

[1] Si può dimostrare che in uno spazio vettoriale di dimensione finita tutte le norme inducono la stessa topologia. Pertanto il limite di una successione non dipende dalla norma. [Si veda ad es.: Abraham R. et al., *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Addison–Wesley, 1983, p. 44]

Assegnato un vettore u si costruisca la successione

$$\begin{aligned}
u^{(0)} &:= u/\|u\| \\
v^{(1)} &:= Au^{(0)} \\
u^{(1)} &:= v^{(1)}/\|v^{(1)}\| \\
&\dots \\
v^{(k)} &:= Au^{(k-1)} \\
u^{(k)} &:= v^{(k)}/\|v^{(k)}\|
\end{aligned}$$

Si dimostra che, se $P_1 u \neq o$, allora

$$\lim_{k\to\infty} \|(I - P_1)u^{(k)}\| = 0$$

Riguardando $\|(I - P_1)u^{(k)}\|$ come *distanza* del vettore $u^{(k)}$ dal sottospazio U_{λ_1}, i vettori $u^{(k)}$ tendono dunque a finire in U_{λ_1}.
Infatti, sostituendo la espressione di $u^{(k-1)}$ nella espressione di $v^{(k)}$ e così via, si ottiene

$$u^{(k)} = \frac{1}{\|v^{(k)}\|} v^{(k)} = \frac{1}{\|Au^{(k-1)}\|} Au^{(k-1)} = \frac{1}{\|A^2 u^{(k-2)}\|} A^2 u^{(k-2)} = \frac{1}{\|A^k u\|} A^k u$$

che può anche scriversi

$$u^{(k)} = \frac{1}{\|A^k u\|} A^k u = \frac{\lambda_1^k}{\|A^k u\|} \left(\frac{1}{\lambda_1} A\right)^k u$$

Poiché

$$u_1 \neq o \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|\lambda_1^k|}{\|A^k u\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\|A^k u/\lambda_1^k\|} = \frac{1}{\|P_1 u\|}$$

$$\lim_{k\to\infty} (I - P_1) \left(\frac{1}{\lambda_1} A\right)^k = (I - P_1)P_1 = O$$

risulta infine

$$\lim_{k\to\infty} (I - P_1)u^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^k}{\|A^k u\|} (I - P_1) \left(\frac{1}{\lambda_1} A\right)^k u = o$$

Si costruisca poi la successione di scalari

$$\eta^{(k)} := \langle v^{(k)}, u^{(k-1)} \rangle$$

Si dimostra che[2]

$$\lim_{k\to\infty} \eta^{(k)} = \lambda_1 \frac{\langle u_1 , u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}$$

[2] Si noti che se la norma è indotta dal prodotto interno allora

$$\lim_{k\to\infty} \eta^{(k)} = \lambda_1$$

Infatti

$$\begin{aligned}\eta^{(k+1)} &:= \langle v^{(k+1)}\,,u^{(k)}\rangle = \langle Au^{(k)}\,,u^{(k)}\rangle = \frac{1}{\|A^k u\|^2}\langle A^{k+1}u\,,A^k u\rangle \\ &= \frac{|\lambda_1|^{2k}}{\|A^k u\|^2}\langle A(A^k u/\lambda_1^k)\,,(A^k u/\lambda_1^k)\rangle\end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{k\to\infty}\eta^{(k)} = \frac{1}{\|u_1\|^2}\langle AP_1 u\,,P_1 u\rangle = \lambda_1\frac{\langle u_1\,,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}$$

Si noti infine che

$$\begin{aligned}(I-P_1)u^{(k)} &= \frac{\lambda_1^k}{\|A^k u\|}(I-P_1)\left(\frac{1}{\lambda_1}A\right)^k u \\ &= \frac{\lambda_1^k}{\|A^k u\|}(I-P_1)\left(u_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k u_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)^k u_r\right) \\ &= \frac{\lambda_1^k}{\|A^k u\|}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k u_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)^k u_r\right)\end{aligned}$$

$$\|(I-P_1)u^{(k)}\| \le \frac{|\lambda_1|^k}{\|A^k u\|}\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k \|u_2 + \ldots + u_r\| = \|u-u_1\|\frac{|\lambda_1|^k}{\|A^k u\|}\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$$

$$\lim_{k\to\infty}\|(I-P_1)u^{(k)}\| = \frac{\|u-u_1\|}{\|u_1\|}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$$

Pertanto i vettori $u^{(k)}$ si avvicinano a U_{λ_1} tanto più rapidamente quanto più piccolo è il rapporto $|\lambda_2/\lambda_1|$.