Decomposizione spettrale per l'endomorfismo aggiunto

Si vogliono illustrare le relazioni tra la decomposizione spettrale per un generico endomorfismo e quella per il suo aggiunto.

Sia A un endomorfismo di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ definito su $\mathbb{C}$ e dotato di prodotto interno.

Gli autovalori dell'endomorfismo aggiunto A^* sono i coniugati degli autovalori di A. Infatti i coefficienti del polinomio caratteristico di A^* sono i coniugati dei coefficienti del polinomio caratteristico di A, come si può dedurre dal fatto che le matrici di A e di A^* in una base ortonormale sono l'una la trasposta coniugata dell'altra.

Si consideri l'autospazio di A corrispondente all'autovalore λ_α

$$\mathrm{U}_{\lambda_\alpha} := \ker(A - \lambda_\alpha I)$$

e l'autospazio di A^* corrispondente all'autovalore λ_β

$$\tilde{\mathrm{U}}_{\lambda_\beta} := \ker(A^* - \overline{\lambda}_\beta I)$$

Se $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ tali autospazi risultano ortogonali. Infatti $\forall u \in \mathrm{U}_{\lambda_\alpha}, \forall v \in \tilde{\mathrm{U}}_{\lambda_\beta}$

$$\begin{gathered}
\langle Au\,,v\rangle = \langle \lambda_\alpha u\,,v\rangle = \lambda_\alpha \langle u\,,v\rangle \\
\langle Au\,,v\rangle = \langle u\,,A^* v\rangle = \langle u\,,\overline{\lambda}_\beta v\rangle = \lambda_\beta \langle u\,,v\rangle \\
0 = (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)\langle u\,,v\rangle \\
\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta \quad \Rightarrow \quad \langle u\,,v\rangle = 0
\end{gathered}$$

Più in generale, si consideri l'autospazio generalizzato di A corrispondente a λ_α

$$\mathrm{V}_{\lambda_\alpha} := \ker(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha}$$

Per le proprietà del nucleo e dell'immagine delle potenze di un endomorfismo si ha

$$\mathcal{U} = \ker(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha} \oplus \mathrm{im}\,(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha}$$

ogni altro autospazio generalizzato $\mathrm{V}_{\lambda_\beta}$ di A risultando tale che[1]

$$\mathrm{V}_{\lambda_\beta} \subset \mathrm{im}\,(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha}$$

Si definisca poi il sottospazio

$$\tilde{\mathrm{V}}_{\lambda_\alpha} := \ker(A^* - \overline{\lambda}_\alpha I)^{\mu_\alpha}$$

e si osservi che, per le proprietà del nucleo e dell'immagine di un generico endomorfismo e del suo aggiunto, si ha

$$\tilde{\mathrm{V}}_{\lambda_\alpha} := \ker(A^* - \overline{\lambda}_\alpha I)^{\mu_\alpha} = (\mathrm{im}\,(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha})^\perp$$

[1] Si può infatti dimostrare che se V e W sono invarianti e $\mathcal{U} = \mathrm{V} \oplus \mathrm{W}$ allora $\lambda_\beta \notin \sigma(A|_{\mathrm{V}}) \quad \Rightarrow \mathrm{V}_{\lambda_\beta} \subset \mathrm{W}$ in modo simile a quello usato per gli autospazi $\mathrm{U}_{\lambda_\beta}$.

Risulta dunque

$$\beta \neq \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V}_{\lambda_\beta} \perp \tilde{\mathrm{V}}_{\lambda_\alpha}$$

Il sottospazio $\tilde{\mathrm{V}}_{\lambda_\alpha}$ risulta inoltre essere l'autospazio generalizzato di A^* corrispondente a λ_α. Si osservi infatti che, ponendo $n := \dim \mathcal{U}$ e $m_\alpha := \dim \mathrm{V}_{\lambda_\alpha}$,

$$\dim \tilde{\mathrm{V}}_{\lambda_\alpha} = \dim\left(\mathrm{im}\,(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha}\right)^\perp = n - \dim\left(\mathrm{im}\,(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha}\right) = n - (n - m_\alpha) = m_\alpha$$

e inoltre

$$\begin{gathered}
\ker\,(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha + 1} = \ker\,(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{im}\,(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha + 1} = \mathrm{im}\,(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha} \\
\ker\,(A^* - \overline{\lambda}_\alpha I)^{\mu_\alpha + 1} = (\mathrm{im}\,(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha + 1})^\perp = (\mathrm{im}\,(A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha})^\perp = \ker\,(A^* - \overline{\lambda}_\alpha I)^{\mu_\alpha}
\end{gathered}$$

Dunque $\tilde{\mathrm{V}}_{\lambda_\alpha}$ è un autospazio generalizzato di A^*.

Si osservi infine che essendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \mathrm{V}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{V}_{\lambda_r} \\
\mathcal{U} &= \tilde{\mathrm{V}}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \tilde{\mathrm{V}}_{\lambda_r}
\end{aligned}$$

l'autospazio generalizzato $\tilde{\mathrm{V}}_{\lambda_\alpha}$ risulta essere il complemento ortogonale della somma dei sottospazi $\mathrm{V}_{\lambda_\beta}$ corrispondenti a tutti gli autovalori diversi da λ_α.