Decomposizione spettrale per un generico endomorfismo

L'obiettivo di estendere la decomposizione spettrale al caso di endomorfismi non diagonalizzabili motiva le definizioni che seguono.
Sia A un endomorfismo di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ definito su $\mathbb{C}$.
L'autospazio corrispondente all' autovalore λ_α

$$\mathrm{U}_{\lambda_\alpha} := \ker (A - \lambda_\alpha I)$$

è un sottospazio invariante rispetto ad A. Si consideri ora il sottospazio

$$\ker (A - \lambda_\alpha I)^2$$

Anche questo è invariante rispetto ad A. Infatti

$$\begin{aligned} \forall u \in \ker (A - \lambda_\alpha I)^2 \qquad (A - \lambda_\alpha I)^2 u = o \quad &\Rightarrow \quad (A - \lambda_\alpha I)^2 (Au) = A(A - \lambda_\alpha I)^2 u = o \\ &\Rightarrow \quad Au \in \ker (A - \lambda_\alpha I)^2 \end{aligned}$$

Inoltre risulta

$$\ker (A - \lambda_\alpha I) \subseteq \ker (A - \lambda_\alpha I)^2$$

Più in generale per ogni intero m il sottospazio

$$\ker (A - \lambda_\alpha I)^m$$

è invariante rispetto ad A e la successione

$$\ker (A - \lambda_\alpha I)^0 := \ker I \ , \ \ker (A - \lambda_\alpha I)^1 \ , \ \ker (A - \lambda_\alpha I)^2 \ \ldots$$

è tale che

$$\ker (A - \lambda_\alpha I)^{m-1} \subseteq \ker (A - \lambda_\alpha I)^m$$

e quindi

$$\dim (A - \lambda_\alpha I)^{m-1} \leq \dim (A - \lambda_\alpha I)^m$$

Da ciò deriva che essendo tali sottospazi contenuti in $\mathcal{U}$ esiste un intero μ_α tale che

$$\forall m < \mu_\alpha \ , \ \forall q > \mu_\alpha \quad \ker (A - \lambda_\alpha I)^m \subset \ker (A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha} = \ker (A - \lambda_\alpha I)^q$$

Il sottospazio

$$\mathrm{V}_{\lambda_\alpha} := \ker (A - \lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha}$$

si dice *autospazio generalizzato* corrispondente all'autovalore λ_α. Si noti che la restrizione di $(A - \lambda_\alpha I)$ a tale sottospazio è nilpotente di indice μ_α.
Si consideri ora la successione di sottospazi

$$\mathrm{im}\, (A - \lambda_\alpha I)^0 := \mathrm{im}\, I \ , \ \mathrm{im}\, (A - \lambda_\alpha I)^1 \ , \ \mathrm{im}\, (A - \lambda_\alpha I)^2 \ldots$$

Risulta in questo caso

$$\mathrm{im}\, (A - \lambda_\alpha I)^{m-1} \supseteq \mathrm{im}\, (A - \lambda_\alpha I)^m$$

e quindi

$$\dim\,(A-\lambda_\alpha I)^{m-1} \geq \dim\,(A-\lambda_\alpha I)^{m}$$

Poiché per le proprietà del *nucleo* e della *immagine* di un generico endomorfismo è

$$\dim\ (\mathrm{im}\,(A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha}) = \dim\mathcal{U} - \dim\ (\ker\,(A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha})$$

risulta

$$\forall m < \mu_\alpha\ ,\ \forall q > \mu_\alpha \quad \mathrm{im}\,(A-\lambda_\alpha I)^{m} \supseteq \mathrm{im}\,(A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha} = \mathrm{im}\,(A-\lambda_\alpha I)^{q}$$

Il sottospazio

$$\mathrm{im}\,(A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha}$$

è ovviamente invariante rispetto ad A e, cosa più interessante, è tale che la restrizione ad esso di $(A-\lambda_\alpha I)$ è un automorfismo. Infatti tale restrizione è iniettiva poiché

$$\mathrm{im}\,(A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha+1} = \mathrm{im}\,(A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha}$$

Da ciò deriva che

$$u \in \ker\,(A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha} \cap \mathrm{im}\,(A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha} \quad \Rightarrow \quad (A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha} u = o \quad \Rightarrow \quad u = o$$

È dunque

$$\ker\,(A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha} \cap \mathrm{im}\,(A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha} = \{o\}$$

Risulta pertanto

$$\mathcal{U} = \mathrm{V}_{\lambda_\alpha} \oplus \mathrm{W}_\alpha$$

dove $\mathrm{W}_\alpha := \mathrm{im}\,(A-\lambda_\alpha I)^{\mu_\alpha}$. Si è così ottenuta una decomposizione dello spazio vettoriale $\mathcal{U}$ in sottospazi invarianti rispetto all'endomorfismo A.

Si noti che l'autospazio generalizzato $\mathrm{V}_{\lambda_\alpha}$ non contiene vettori appartenenti ad autospazi $\mathrm{U}_{\lambda_\beta}$ con $\lambda_\beta \neq \lambda_\alpha$. Infatti si consideri un vettore $u \in \mathrm{V}_{\lambda_\alpha} \cap \mathrm{U}_{\lambda_\beta}$. Indicando con μ il più piccolo intero tale che $(A-\lambda_\alpha I)^{\mu} u = o$, risulta

$$(A-\lambda_\alpha I)^{\mu-1}(A-\lambda_\alpha I)u = o$$
$$(A-\lambda_\alpha I)^{\mu-1}(A-\lambda_\beta I)u = o$$

Ne deriva che

$$(A-\lambda_\alpha I)^{\mu-1}(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)u = o$$

Essendo $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$, deve essere $u = o$. Dunque la restrizione di A al sottospazio $\mathrm{V}_{\lambda_\alpha}$ e la restrizione di A al sottospazio W_α non hanno autovalori in comune. Da questo deriva che[1]

$$\lambda_\beta \neq \lambda_\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V}_{\lambda_\beta} \subset \mathrm{W}_\alpha$$

Si consideri ora la restrizione $A|_{\mathrm{W}_\alpha}$, la corrispondente decomposizione di W_α e così via sino a giungere a $\mathrm{W}_r = \{o\}$. Si ottiene in tal modo la seguente decomposizione di $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \mathrm{V}_{\lambda_1} \oplus \mathrm{V}_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{V}_{\lambda_r}$$

[1] Si può infatti dimostrare che se V e W sono invarianti e $\mathcal{U} = \mathrm{V} \oplus \mathrm{W}$ allora $\lambda_\beta \notin \sigma(A|_{\mathrm{V}}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V}_{\lambda_\beta} \subset \mathrm{W}$ in modo simile a quello usato per gli autospazi $\mathrm{U}_{\lambda_\beta}$.

La corrispondente decomposizione dell'endomorfismo A

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_r$$

è caratterizzata dal fatto che, indicando con P_α la proiezione canonica su $\mathrm{V}_{\lambda_\alpha}$, gli endomorfismi $(A_\alpha - \lambda_\alpha P_\alpha)$ sono nilpotenti. Tale decomposizione si dice *decomposizione spettrale* dell'endomorfismo A.

Si osservi che poiché

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + \ldots + A_r \\ &= (A_1 - \lambda_1 P_1) + (A_2 - \lambda_2 P_2) + \ldots + (A_r - \lambda_r P_r) + (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_r P_r) \end{aligned}$$

l'endomorfismo A può essere espresso come somma degli endomorfismi

$$\begin{aligned} N &:= (A_1 - \lambda_1 P_1) + (A_2 - \lambda_2 P_2) + \ldots + (A_r - \lambda_r P_r) \\ S &:= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_r P_r) \end{aligned}$$

il primo nilpotente, il secondo diagonalizzabile.

In una base di $\mathcal{U}$ costituita dall'unione di basi dei sottospazi V_α la matrice dell'endomorfismo A ha una forma a blocchi, essendo ciascun V_α invariante. In particolare la matrice di S è diagonale.

Si consideri ora una decomposizione di ciascun sottospazio V_α nella somma di sottospazi ciclici rispetto ad N. Ciascuno di tali sottospazi ciclici è invariante, sia rispetto ad S che rispetto ad N, ed è tale che in una base $\{u, Nu, N^2u, \ldots, N^{q-1}u\}$, ottenuta da un vettore generatore u, la matrice dell'endomorfismo $(N + S)$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_\alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_\alpha & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_\alpha \end{pmatrix}$$

Unendo delle basi così fatte dei sottospazi ciclici rispetto ad N di ciascun sottospazio V_α si ottiene una base di $\mathcal{U}$ tale che la matrice di A è costituita da blocchi della forma qui sopra mostrata. Tale matrice si dice *matrice canonica di Jordan* dell'endomorfismo A.