Endomorfismi normali

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno. Un endomorfismo A di $\mathcal{U}$ si dice *normale* se

$$AA^* = A^*A$$

Una importante proprietà degli endomorfismi normali è la seguente

$$\ker A^* = \ker A$$

Si osservi infatti che

$$AA^* = A^*A \quad \Rightarrow \quad \{\forall u, v \in \mathcal{U} \quad \langle A^* v \,, A^* u\rangle = \langle AA^* v \,, u\rangle = \langle A^*A v \,, u\rangle = \langle A v \,, A u\rangle\}$$

Viceversa

$$\{\forall u, v \in \mathcal{U} \quad \langle A^* v \,, A^* u\rangle = \langle A v \,, A u\rangle \;\Rightarrow\; \langle A^* v \,, A^* u\rangle = \langle AA^* v \,, u\rangle \,, \\ \langle A v \,, A u\rangle = \langle A^*A v \,, u\rangle\} \;\Rightarrow\; AA^* = A^*A$$

In particolare

$$\langle A^* v \,, A^* v\rangle = \langle A v \,, A v\rangle \;\Rightarrow\; \{\, A^* v = 0 \iff A v = 0 \,\} \quad \Rightarrow \quad \ker A^* = \ker A$$

Essendo dunque

$$(\operatorname{im} A)^\perp = \ker A^* = \ker A$$

esiste la decomposizione

$$\mathcal{U} = \operatorname{im} A \oplus \ker A$$

Inoltre essendo

$$(\operatorname{im} A^*)^\perp = \ker A = \ker A^* = (\operatorname{im} A)^\perp$$

risulta anche

$$\operatorname{im} A^* = \operatorname{im} A$$

Si noti che sono endomorfismi normali gli endomorfismi *autoaggiunti*, gli endomorfismi *emisimmetrici* e gli endomorfismi *unitari*.