Matrice di una trasformazione lineare

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due spazi vettoriali e

$$A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

una trasformazione lineare. Se $\{b_1 \dots b_n\}$ è una base di $\mathcal{U}$ e $\{d_1 \dots d_m\}$ è una base di $\mathcal{V}$ e

$$\varphi : \mathcal{U} \to \Gamma^n$$
$$\psi : \mathcal{V} \to \Gamma^m$$

sono gli isomorfismi indotti da tali basi, alla trasformazione lineare A corrisponde una trasformazione lineare

$$M : \Gamma^n \to \Gamma^m$$

definita dal seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{A} & \mathcal{V} \\ \big\downarrow \varphi & & \big\downarrow \psi \\ \Gamma^n & \xrightarrow{M} & \Gamma^m \end{array}$$

La trasformazione M è dunque

$$M := \psi \circ A \circ \varphi^{-1}$$

Un vettore $u \in \mathcal{U}$ è trasformato da A nel vettore $Au \in \mathcal{V}$. Il vettore $\mathbf{u} := \varphi(u) \in \Gamma^n$, è, corrispondentemente, trasformato da M nel vettore $\mathbf{v} := \psi(Au) \in \Gamma^m$.
La relazione esplicita tra le componenti dei vettori corrispondenti è la seguente

$$\psi^i(\mathrm{v}) = \psi^i(Au) = \psi^i(A\varphi^j(u)b_j) = \psi^i(Ab_j)\varphi^j(u)$$

che può anche scriversi

$$v^i = a^i{}_j u^j$$

avendo posto $v^i := \psi^i(\mathrm{v})$, $u^j := \varphi^j(u)$ e

$$a^i{}_j := \psi^i(Ab_j)$$

Riguardando ciascuno scalare $a^i{}_j$ come l'elemento *i–esimo* della colonna *j–esima* di una matrice $\mathbf{A}$, la espressione precedente può essere scritta nella forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

La matrice $\mathbf{A}$ così definita si dice *matrice della trasformazione A*.
Si noti che dalle definizioni date deriva che l'elemento $a^i{}_j$ della matrice $\mathbf{A}$ risulta tale che

$$Ab_j = a^i{}_j d_i$$

Dunque, scelta una coppia di basi in $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, ad una trasformazione lineare corrisponde una matrice $m \times n$ e, viceversa, ad una matrice $m \times n$ corrisponde, attraverso la relazione qui sopra, una unica trasformazione lineare.

È inoltre utile osservare quanto segue. Essendo φ e ψ degli isomorfismi risulta

$$\begin{aligned}\ker M &= \varphi(\ker A)\\ \operatorname{im} M &= \psi(\operatorname{im} A)\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\varphi(\ker A) &:= \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \varphi(u)\,,\ u \in \ker A\}\\ \psi(\operatorname{im} A) &:= \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \psi(v)\,,\ v \in \operatorname{im} A\}\end{aligned}$$

Per ogni vettore $\mathbf{v} \in \operatorname{im} M$ esiste $u \in \mathcal{U}$ tale che

$$\mathbf{v} = \psi(Au) = \psi(A\varphi^i(u)b_i) = \varphi^i(u)\psi(Ab_i)$$

Ponendo

$$\mathbf{a}_i := \psi(Ab_i)$$

risulta dunque che il sottospazio $\operatorname{im} M$ è generato dalla famiglia di vettori $\{\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n\}$. Poiché tali vettori costituiscono le colonne della matrice $\mathbf{A}$ di A, si può affermare che la dimensione di $\operatorname{im} M$ è uguale al numero di colonne indipendenti della matrice $\mathbf{A}$ e quindi al *rango* ρ di tale matrice. In conclusione, poiché φ e ψ sono isomorfismi, è

$$\begin{aligned}\nu &:= \dim(\ker A) = \dim(\ker M)\\ r &:= \dim(\operatorname{im} A) = \dim(\operatorname{im} M) = \rho\end{aligned}$$

Essendo il numero di righe di $\mathbf{A}$ uguale a m e il numero di colonne uguale a n, le condizioni di iniettività, suriettività e biiettività per la trasformazione lineare A possono essere espresse in termini di numero di righe, numero di colonne e rango della sua matrice e risultano indipendenti dalle basi scelte.

In particolare se una trasformazione lineare è un isomorfismo allora la sua matrice, comunque si scelgano le basi, ha lo stesso numero di righe e di colonne e rango massimo, e viceversa.

La condizione di appartenenza di un vettore $v \in \mathcal{V}$ alla immagine di A si può inoltre esprimere come condizione di dipendenza dei vettori $\{\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n, \mathbf{v}\}$.