Norma di una trasformazione lineare

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due spazi vettoriali dotati di norma e

$$A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

una trasformazione lineare.
È possibile dimostrare ([1] p. 206, [2] p. 177) che, essendo $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ spazi vettoriali di dimensione finita (come si è supposto sin qui e si supporrà nel seguito), l'insieme costituito dai valori

$$\|Au\| \quad \forall u \in \mathcal{U} \mid \|u\| = 1$$

è limitato e chiuso. Si definisce *norma della trasformazione* A il numero reale

$$\|A\| := \max_{\|\mathrm{u}\|=1} \|Au\|$$

Si osservi che se si definiscono le norme

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{U} \quad & \|u\|_{\mathcal{U}} := \|\varphi u\|_{\Gamma^n} \\ \forall v \in \mathcal{V} \quad & \|v\|_{\mathcal{V}} := \|\psi v\|_{\Gamma^m} \end{aligned}$$

indotte dagli isomorfismi $\varphi : \mathcal{U} \to \Gamma^n$ e $\psi : \mathcal{V} \to \Gamma^m$ corrispondenti ad una coppia di basi, allora per la trasformazione lineare A si ha

$$\|A\| := \max_{\|\mathrm{u}\|=1} \|Au\|_{\mathcal{U}} = \max_{\|\varphi \mathrm{u}\|=1} \|\varphi(Au)\|_{\Gamma^m} = \max_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathbf{Au}\|_{\Gamma^m}$$

Questa espressione suggerisce di definire *norma della matrice* $\mathbf{A}$ il numero reale

$$\|\mathbf{A}\| := \max_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathbf{Au}\|_{\Gamma^m}$$

In particolare si dimostra che, in corrispondenza delle norme $\|\cdot\|_p$ in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, si ha[1]

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &:= \max_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathbf{Au}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a^i{}_j| \\ \|\mathbf{A}\|_\infty &:= \max_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathbf{Au}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a^i{}_j| \end{aligned}$$

[1] Si ricorda che $a^i{}_j$ è l'elemento *i–esimo* della colonna *j–esima* della matrice $\mathbf{A}$.