Spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$

L'insieme delle *n–ple* ordinate di numeri reali $\mathbb{R}^n$ e l'insieme delle *n–ple* ordinate di numeri complessi $\mathbb{C}^n$, dotati delle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare, risultano essere degli spazi vettoriali. È semplice verificare che una base in essi è costituita dalla famiglia di vettori [1]

$$\mathbf{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad \mathbf{b}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

e che perciò $\dim \mathbb{R}^n = n$ e $\dim \mathbb{C}^n = n$.

La base qui sopra è utile poiché permette di identificare un vettore con la *n-pla* delle sue componenti. Si indicherà con il termine di *base naturale* (di $\mathbb{R}^n$ o di $\mathbb{C}^n$).

Più in generale se Γ è un campo, l'insieme delle *n–ple* di elementi di Γ può essere dotato della struttura di spazio vettoriale indotta dalle operazioni in Γ.

Si osservi che se $\mathcal{U}$ è uno spazio vettoriale definito su un campo Γ, alla scelta di una base $\{b_1 \dots b_n\}$ corrisponde la definizione di una funzione

$$\varphi : \mathcal{U} \to \Gamma^n$$

che trasforma ciascun vettore $u \in \mathcal{U}$ nella *n–pla* delle sue componenti nella base $\{b_1 \dots b_n\}$. È semplice dimostrare che tale funzione è lineare, iniettiva (poiché due vettori diversi non possono avere le stesse componenti) e suriettiva (poiché ad ogni *n–pla* corrisponde un vettore di $\mathcal{U}$ combinazione lineare dei vettori base). È dunque un isomorfismo. Da questo deriva che una famiglia di vettori indipendenti in $\mathcal{U}$ è trasformata da φ in una famiglia di vettori indipendenti in Γ^n.

L'isomorfismo φ risulta definito dalle seguenti relazioni

$$\varphi(b_i) = \mathbf{b}_i \qquad i = 1, \dots, n$$

essendo $\{\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n\}$ la base naturale di Γ^n.

È infine utile considerare, in corrispondenza di φ, le funzioni

$$\varphi^i : \mathcal{U} \to \Gamma \qquad i = 1, \dots, n$$

tali che

$$\forall u \in \mathcal{U} \qquad u = \varphi^1(u) b_1 + \varphi^2(u) b_2 + \dots + \varphi^n(u)$$

Anche le funzioni φ^i risultano essere lineari.

[1] Le *n–ple* vengono rappresentate qui per semplicità come matrici ad una colonna.