Trasformazione aggiunta

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due spazi vettoriali dotati di prodotto interno. Assegnata una trasformazione lineare

$$A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

la trasformazione

$$A^* : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$$

tale che

$$\forall u \in \mathcal{U} \,,\, \forall v \in \mathcal{V} \quad \langle Au \,,\, v \rangle_{\mathcal{V}} = \langle u \,,\, A^* v \rangle_{\mathcal{U}}$$

si dice *trasformazione aggiunta* di A. È semplice dimostrare che tale trasformazione è lineare, unica e tale che $A^{**} = A$.

Per una qualsiasi trasformazione lineare $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ si ha

$$(\mathrm{im}\, A)^{\perp} = \ker A^*$$

Infatti

$$\{ \forall v \in \ker A^* \,,\, \forall u \in \mathcal{U} \quad \langle v \,,\, Au \rangle = \langle A^* v \,,\, u \rangle = 0 \} \Rightarrow \ker A^* \subset (\mathrm{im}\, A)^{\perp}$$

$$\begin{aligned} \{ \forall v \in (\mathrm{im}\, A)^{\perp} \,,\, \forall u \in \mathcal{U} \quad & \langle A^* v \,,\, u \rangle = \langle v \,,\, Au \rangle = 0 \\ & \Rightarrow A^* v = o \Rightarrow v \in \ker A^* \} \Rightarrow (\mathrm{im}\, A)^{\perp} \subset \ker A^* \end{aligned}$$

La decomposizione ortogonale dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$

$$\mathcal{V} = \mathrm{im}\, A \oplus (\mathrm{im}\, A)^{\perp}$$

diventa dunque

$$\mathcal{V} = \mathrm{im}\, A \oplus \ker A^*$$

Scambiando A con A^*, si ha anche

$$(\mathrm{im}\, A^*)^{\perp} = \ker A$$

La corrispondente decomposizione ortogonale dello spazio vettoriale $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \mathrm{im}\, A^* \oplus (\mathrm{im}\, A^*)^{\perp}$$

diventa

$$\mathcal{U} = \mathrm{im}\, A^* \oplus \ker A$$

Queste decomposizioni ortogonali sono importanti perché permettono ad esempio di esprimere la condizione di appartenenza di un vettore all'immagine di A come condizione di ortogonalità rispetto al nucleo di A^*. Inoltre da esse deriva l'esistenza della decomposizione spettrale per endomorfismi normali.

Indicando con m la dimensione di $\mathcal{V}$, con r il rango di A e con r^* il rango di A^*, si ha infine

$$(\mathrm{im}\, A)^{\perp} = \ker A^* \quad \Rightarrow \quad m - r = m - r^* \quad \Rightarrow \quad r = r^*$$

Questo implica inoltre che la matrice di A ha lo stesso rango della matrice di A^*.

Se $\{b_1 \dots b_n\}$ è una base in $\mathcal{U}$ e $\{d_1 \dots d_m\}$ è una base in $\mathcal{V}$ quale relazione esiste tra la matrice di A e la matrice di A^* ? In generale risulta[1]

$$\langle A b_i \, , d_j \rangle = a^k{}_i \langle d_k \, , d_j \rangle$$
$$\langle b_i \, , A^* d_j \rangle = \overline{a}^{*h}{}_j \langle b_i \, , b_h \rangle$$

Nel caso di basi ortonormali si ha in particolare

$$\langle A b_i \, , d_j \rangle = a^j{}_i$$
$$\langle b_i \, , A^* d_j \rangle = \overline{a}^{*i}{}_j$$

e quindi

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^H$$

avendo posto $\mathbf{A}^H := \overline{\mathbf{A}}^T$.

Si osservi che se A è una isometria allora

$$A^* A = I$$

e viceversa. Infatti

$$\begin{aligned} \forall u_1 \in \mathcal{U} \quad \{\forall u_2 \in \mathcal{U} \quad \langle A u_1 \, , A u_2 \rangle = \langle u_1 \, , u_2 \rangle\} \quad &\Rightarrow \quad \{\forall u_2 \in \mathcal{U} \quad \langle A^* A u_1 - u_1 \, , u_2 \rangle = 0\} \\ &\Rightarrow \quad A^* A u_1 = u_1 \\ A^* A = I \quad \Rightarrow \quad \{\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U} \quad \langle A u_1 \, , A u_2 \rangle &= \langle A^* A u_1 \, , u_2 \rangle = \langle u_1 \, , u_2 \rangle\} \end{aligned}$$

Nel caso di basi ortonormali la matrice dell'isomometria A è tale che

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

[1] Si indica con $a^i{}_j$ l'elemento *i–esimo* della colonna *j–esima* della matrice $\mathbf{A}$, con $a^{*i}{}_j$ l'elemento *i–esimo* della colonna *j–esima* della matrice $\mathbf{A}^*$.