Spazi vettoriali

Si dice *spazio vettoriale* la struttura algebrica

$$(\mathcal{U}\,,+\,,\Gamma\,,\cdot\,)$$

dove $\mathcal{U}$ è un insieme, Γ un campo e le *operazioni*

$$\begin{array}{ccc} + & : & \mathcal{U}\times\mathcal{U}\rightarrow\mathcal{U} \\ \cdot & : & \Gamma\times\mathcal{U}\rightarrow\mathcal{U} \end{array}$$

sono tali che

*A*1.	$\forall u, v \in \mathcal{U}$	$u+v=v+u$
*A*2.	$\forall u, v, w \in \mathcal{U}$	$(u+v)+w=u+(v+w)$
*A*3.	$\exists\, o \in \mathcal{U} \quad \vert \quad \forall u \in \mathcal{U}$	$u+o=u$
*A*4.	$\forall u \in \mathcal{U} \quad \exists\, -u \quad \vert$	$u+(-u)=o$
*A*5.	$\forall u, v \in \mathcal{U}\,, \forall \alpha \in \Gamma$	$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$
*A*6.	$\forall u \in \mathcal{U}\,, \forall \alpha,\beta \in \Gamma$	$(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$
*A*7.	$\forall u \in \mathcal{U}\,, \forall \alpha,\beta \in \Gamma$	$\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$
*A*8.	$\forall u \in \mathcal{U}$	$1\,u=u$

Gli elementi di $\mathcal{U}$ si dicono *vettori*, gli elementi di Γ si dicono *scalari*.
Il simbolo $\cdot$ è sempre omesso, come nelle espressioni qui sopra.

Dai precedenti assiomi si possono derivare alcuni teoremi elementari.
Ponendo $\alpha=1$ e $\beta=0$ in *A*6 si ottiene

$$1\,u=1\,u+0\,u \quad\Rightarrow\quad 0u=o$$

Ponendo $v=o$ in *A*5 si ottiene

$$\alpha u=\alpha u+\alpha o \quad\Rightarrow\quad \alpha o=o$$

Ponendo $\alpha=1$ e $\beta=-1$ in *A*6 si ottiene

$$0\,u=u+(-1)u \quad\Rightarrow\quad o=u+(-1)u \quad\Rightarrow\quad (-1)u=-u$$

Inoltre per $\alpha\neq 0$ da *A*7 deriva

$$\alpha u=o \quad\Rightarrow\quad 1\,u=\alpha^{-1}(\alpha u)=\alpha^{-1}o=o \quad\Rightarrow\quad u=o$$

Nel seguito si farà riferimento solo al caso in cui Γ è il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ oppure il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, usando il solo simbolo $\mathcal{U}$ per indicare lo spazio vettoriale $(\mathcal{U}\,,+\,,\Gamma\,,\cdot\,)$.