Complemento ortogonale

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno e V un suo sottospazio. Si dice *complemento ortogonale* di V il sottoinsieme di $\mathcal{U}$

$$\mathrm{V}^{\perp} := \{\, v \in \mathcal{U} \mid \langle v\,, u\rangle = 0\,,\ \forall u \in \mathrm{V}\,\}$$

Tale sottoinsieme è un sottospazio di $\mathcal{U}$ poiché

$$\begin{aligned}
&\forall u_1, u_2 \in \mathrm{V}^{\perp}\,,\ \forall v \in \mathrm{V}\,,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}\\
&\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\,, v\rangle = \alpha_1\langle u_1\,, v\rangle + \alpha_2\langle u_2\,, v\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \in \mathrm{V}^{\perp}
\end{aligned}$$

Per qualunque sottospazio V di $\mathcal{U}$ si ha

$$\mathcal{U} = \mathrm{V} \oplus \mathrm{V}^{\perp}$$

Infatti

$$v \in\ \mathrm{V} \cap \mathrm{V}^{\perp} \quad\Rightarrow\quad \langle v\,, v\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad v = o$$

Inoltre, assegnata una base ortonormale $\{b_1 \dots b_r\}$ di V, un qualsiasi vettore $u \in \mathcal{U}$ può essere espresso come somma

$$u = v + w \quad v \in \mathrm{V}\,,\ w \in \mathrm{V}^{\perp}$$

semplicemente ponendo

$$\begin{aligned}
v &:= \sum_{i=1}^{r}\langle u\,, b_i\rangle b_i\\
w &:= u - \sum_{i=1}^{r}\langle u\,, b_i\rangle b_i
\end{aligned}$$

Il vettore v appartiene infatti a V mentre risulta $\langle w\,, b_j\rangle = 0 \quad \forall b_j$.

È interessante osservare che dalla decomposizione del vettore u appena data si ottiene

$$\begin{aligned}
\langle u\,, u\rangle &= \langle v\,, v\rangle + \langle v\,, w\rangle + \langle w\,, v\rangle + \langle w\,, w\rangle\\
&= \langle v\,, v\rangle + \langle w\,, w\rangle
\end{aligned}$$

da cui, introducendo la norma $\|u\| := \langle u\,, u\rangle^{1/2}$, si ha il *teorema di Pitagora*

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

e quindi la *diseguaglianza di Bessel*

$$\|u\|^2 \geq \|v\|^2$$

Il numero $\|w\|$ si dice *distanza* del vettore u dal sottospazio V.