Endomorfismi

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale. Si dice *endomorfismo* di $\mathcal{U}$ una trasformazione lineare

$$A : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$$

Un particolare endomorfismo è la *identità* I definita dalla proprietà

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad Iu = u$$

Un endomorfismo biiettivo si dice *automorfismo*.

L'insieme $L(\mathcal{U},\mathcal{U})$ degli endomorfismi di $\mathcal{U}$ può essere dotato della struttura di spazio vettoriale definendo le operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare nel modo seguente

$$\begin{array}{ll} \forall A, B \in L(\mathcal{U},\mathcal{U}) \ , \ \forall u \in \mathcal{U} & (A+B)u = Au + Bu \\ \forall A \in L(\mathcal{U},\mathcal{U}) \ , \ \forall u \in \mathcal{U} \ , \ \forall \alpha \in \Gamma & (\alpha A)u = \alpha A u \end{array}$$

Da ciò deriva che l'elemento neutro rispetto alla addizione è l'endomorfismo O tale che

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad Ou = o$$

Se A e B sono due endomorfismi è semplice dimostrare che la composizione AB è anch'essa un endomorfismo e che, in particolare,

$$\forall A \in L(\mathcal{U},\mathcal{U}) \qquad AI = IA = A$$

La composizione di due endomorfismi può essere vista come una operazione (detta usualmente *prodotto*) tra due elementi di $L(\mathcal{U},\mathcal{U})$ rispetto alla quale l'elemento neutro è la identità. Dotando di tale operazione lo *spazio vettoriale* $L(\mathcal{U},\mathcal{U})$ si ottiene una *algebra*.

L'insieme degli automorfismi di $\mathcal{U}$ (senza la struttura di spazio vettoriale) con la operazione di prodotto risulta avere la struttura di *gruppo* se si definisce come elemento *inverso* l'automorfismo inverso. Tale gruppo si dice *gruppo generale lineare* e si indica con $GL(\mathcal{U})$.

Nel seguito si assumerà in generale che $L(\mathcal{U},\mathcal{U})$ sia dotato della struttura di algebra.

Se $\mathcal{U}$ è dotato di prodotto interno allora risulta

$$(AB)^* = B^* A^*$$

Infatti

$$\forall u, v \in \mathcal{U} \quad \langle ABu\,, v\rangle = \langle Bu\,, A^* v\rangle = \langle u\,, B^* A^* v\rangle$$