Esercizi

1. [Halmos, p. 6] Sia $\mathcal{U}$ l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali in cui siano definite le seguenti leggi di composizione

$$\forall u, v \in \mathcal{U} \quad u + v = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 + v^1 \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{U} \quad \alpha u = \alpha \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'elemento neutro rispetto alla addizione sia $o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre l'elemento opposto sia tale che

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad - u = - \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^1 \\ -u^2 \end{pmatrix}$$

L'insieme $\mathcal{U}$ risulta essere uno spazio vettoriale? Perché?

2. [Halmos, p. 7] Sia $\mathbb{C}^3$ lo spazio vettoriale delle terne ordinate di numeri complessi e V un suo sottoinsieme costituito dai vettori

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

tali che abbiano una delle seguenti proprietà

$$\begin{aligned}
&(a) \quad u^1 \in \mathbb{R} \\
&(b) \quad u^1 = 0 \\
&(c) \quad u^1 = 0 \quad \text{oppure} \quad u^2 = 0 \\
&(d) \quad u^1 + u^2 = 0 \\
&(e) \quad u^1 + u^2 = 1
\end{aligned}$$

In quali casi V è un sottospazio?

3. Si consideri una famiglia di vettori in uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$. Dimostrare che se tale famiglia comprende il vettore nullo allora essa è costituita da vettori dipendenti.

4. [Greub, p. 14] Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale e sia

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$$

una famiglia di vettori indipendenti. Dimostrare che se un vettore b_i viene sostituito con il vettore

$$b_i + \alpha b_j \qquad i \neq j, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

la famiglia così ottenuta risulta ancora costituita da vettori indipendenti.

5. [Greub, p. 15] Quali delle seguenti famiglie di vettori in $\mathbb{R}^4$ sono costituite da vettori indipendenti?

$$(a) \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{pmatrix}17\\39\\25\\10\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}13\\12\\99\\4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}16\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$(d) \quad \begin{pmatrix}1\\1/2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1/4\\0\\0\\1/4\end{pmatrix}$$

Estendere le famiglie di vettori indipendenti sino a costruire una base.

6. [Greub, p. 15] Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$. I vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}i\\2\\1+i\end{pmatrix}$$

sono indipendenti? Esprimere i vettori

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}i\\i\\i\end{pmatrix}$$

come combinazioni lineari dei precedenti.

7. [Bowen & Wang, p. 44] Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale definito sul campo dei numeri complessi. Si consideri l'insieme $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ e si definiscano in tale insieme l'addizione e la moltiplicazione per uno scalare nel seguente modo

$$\{u_1, u_2\} + \{v_1, v_2\} = \{u_1 + v_1, u_2 + v_2\}$$
$$(\lambda + i\mu)\{u_1, u_2\} = \{\lambda u_1 - \mu u_2, \mu u_1 + \lambda u_2\}$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ risulta essere uno spazio vettoriale sul campo dei numeri complessi.

8. [Bowen & Wang, p. 55] Si consideri uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ e una base $\{b_1, b_2, b_3\}$ in esso. Sia U sia il sottospazio generato dal vettore

$$u := b_2 + b_3$$

e V il sottospazio generato dai vettori

$$\mathrm{v}_1 := b_1 + b_3$$
$$\mathrm{v}_2 := b_1 + b_2 + b_3$$

(a) Dimostrare che

$$\mathcal{U} = \mathrm{U} \oplus \mathrm{V}$$

(b) trovare un altro sottospazio W tale che

$$\mathcal{U} = \mathrm{U} \oplus \mathrm{W}$$

9. [Greub, p. 48] Descrivere gli spazi $\operatorname{im} M$ e $\ker M$ delle trasformazioni lineari $M : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definite nel modo seguente

$$M_a\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1 - u^2 \\ u^1 + u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix}, \quad M_b\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^1 \\ u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad M_c\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^4 \\ u^1 + u^2 \\ u^1 + u^3 \\ u^4 \end{pmatrix}$$

per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$. Quali sono le matrici di tali trasformazioni nella base standard?

10. [Greub, p. 49] Descrivere gli spazi $\operatorname{im} M$ e $\ker M$ delle trasformazioni lineari $M : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ definite nel modo seguente

$$M_a\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5u^1 - u^2 \\ u^1 + u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^1 \end{pmatrix}, \quad M_b\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1 + u^2 + 7u^3 + u^4 \\ 2u^3 + u^4 \\ 2u^1 \\ u^2 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}, \quad M_c\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^4 - u^2 + u^3 + u^1 \\ u^3 - u^2 \\ 17u^1 + 13u^2 \\ 16u^1 + 5u^4 \\ u^2 - u^3 \end{pmatrix}$$

per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$. Quali sono le matrici di tali trasformazioni nelle basi standard?

11. Descrivere gli spazi $\operatorname{im} M$ e $\ker M$ della trasformazione lineare $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la cui matrice nella base standard è

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ripetere con la matrice della trasformazione $M^2 := M \circ M$.

12. Sia $\{b_1, b_2\, b_3\}$ una base di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$. Si consideri il sottospazio V generato dal vettore

$$\mathrm{v} := b_1 + b_2$$

e il sottospazio W generato dai vettori

$$\mathrm{w}_1 := b_1 + b_3$$
$$\mathrm{w}_2 := b_3$$

(a) Verificare che $\mathcal{U} = \mathrm{V} \oplus \mathrm{W}$;

(b) calcolare la matrice, nella base $\{b_1, b_2\, b_3\}$, della proiezione P tale che $\operatorname{im} P = \mathrm{V}$ e $\ker P = \mathrm{W}$ (si calcoli prima la matrice di P nella base $\{v, w_1, w_2\}$).

13. Assegnata una base $\{b_1, b_2\}$ in uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$, e il prodotto interno tale che

$$\begin{aligned} \langle b_1\,, b_1\rangle &= 4 \\ \langle b_1\,, b_2\rangle &= 1 \\ \langle b_2\,, b_2\rangle &= 2 \end{aligned}$$

(a) calcolare $\langle u\,, v\rangle$ con

$$\begin{aligned} u &= b_1 + 2b_2 \\ v &= b_1 + b_2 \end{aligned}$$

(b) costruire un vettore ortogonale a b_1;

(c) costruire una base ortonormale.

14. In uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$, dotato di prodotto interno, sia assegnata la base ortonormale $\{b_1, b_2, b_3\}$. Indicando con U il sottospazio generato dal vettore

$$u := b_2 + b_3$$

(a) determinare una base del sottospazio $\mathrm{U}^\perp$;

(b) calcolare la matrice della proiezione P tale che $\operatorname{im} P = \mathrm{U}$, $\ker P = \mathrm{U}^\perp$.

15. Assegnata la trasformazione lineare $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ la cui matrice, nelle basi $\{b_1, b_2, b_3\}$ di $\mathcal{U}$ e $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ di $\mathcal{V}$, sia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

descrivere $\ker A$ e $\operatorname{im} A$. Assumendo poi che gli spazi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ siano dotati di prodotto interno e che le basi $\{b_1, b_2, b_3\}$ di $\mathcal{U}$ e $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ di $\mathcal{V}$ siano ortonormali, determinare la matrice della trasformazione A^*. Descrivere infine i sottospazi $\ker A^*$ e $\operatorname{im} A^*$ e verificare le proprietà

$$\begin{aligned} (\operatorname{im} A)^\perp &= \ker A^* \\ (\operatorname{im} A^*)^\perp &= \ker A \\ \mathcal{U} &= \operatorname{im} A^* \oplus \ker A \\ \mathcal{V} &= \operatorname{im} A \oplus \ker A^* \end{aligned}$$

16. In uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ sia assegnata la base $\{b_1, b_2, b_3\}$ e l'endomorfismo A la cui matrice sia

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Verificare che il sottospazio U generato dai vettori

$$u := b_1$$
$$v := -b_2 + b_3$$

è invariante rispetto ad A.

Calcolare poi la matrice di A nella base $\{u, v, w\}$ con $w \notin$ U. In particolare si consideri il vettore

$$w := b_1 - b_2 - b_3$$

e si dimostri che anche il sottospazio da esso generato è invariante rispetto ad A.

17. Descrivere gli autospazi degli endomorfismi di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ le cui matrici, in una base $\{b_1, b_2\}$, siano

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

18. [Bowen & Wang, p. 145] Descrivere gli autospazi dell'endomorfismo $A : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ la cui matrice, in una base ortonormale $\{b_1, b_2\}$, sia

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esprimere poi la matrice di A come combinazione lineare delle matrici delle proiezioni ortogonali sugli autospazi (decomposizione spettrale di A).

19. [Bowen & Wang, p. 145] Si consideri l'endomorfismo $A : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ la cui matrice, in una base ortonormale $\{b_1, b_2, b_3\}$, sia

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare una base ortonormale rispetto alla quale la matrice di A sia diagonale.

20. Sia $A : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ un automorfismo e U_λ un suo autospazio. Si dimostri che U_λ è anche un autospazio di A^{-1}.

21. [Bowen & Wang, p. 145] Si consideri l'endomorfismo $A : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ tale che, indicando con $\{b_1, b_2, b_3\}$ una base ortonormale, sia

$$Ab_1 = 2\sqrt{2}b_1 - 2b_2$$
$$Ab_2 = \Big(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1\Big)b_1 + \Big(3 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\Big)b_2$$
$$Ab_3 = b_3$$

Calcolare gli endomorfismi R e U della decomposizione polare di A.