Elasticità lineare per corpi affini

Indice

1 Piccole deformazioni

Di solito i corpi si deformano molto poco. Ha dunque interesse valutare la risposta a "piccole deformazioni". Si consideri una traiettoria generata da deformazioni affini dipendenti da un parametro di controllo β

$$\phi_\beta(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) = \phi_\beta(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) + \mathbf{F}_\beta(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) \tag{1}$$

e la decomposizione polare del gradiente della deformazione

$$\mathbf{F}_\beta = \mathbf{R}_\beta \mathbf{U}_\beta. \tag{2}$$

Le espansioni in serie

$$\mathbf{R}_\beta = \mathbf{I} + \mathbf{\Theta}_\beta + o(\beta), \tag{3}$$
$$\mathbf{U}_\beta = \mathbf{I} + \mathbf{E}_\beta + o(\beta), \tag{4}$$

sono costituite dalla somma del valore in $\beta = 0$, di un termine lineare in β e di un termine $o(\beta)$ tale che

$$\lim_{\beta\to 0} \frac{o(\beta)}{\beta}\,\mathbf{a} = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{V}. \tag{5}$$

Sostituendo queste espressioni nella (2) si ottiene

$$\mathbf{F}_\beta = (\mathbf{I} + \mathbf{\Theta}_\beta)(\mathbf{I} + \mathbf{E}_\beta) + o(\beta) = \mathbf{I} + \mathbf{\Theta}_\beta + \mathbf{E}_\beta + o(\beta), \tag{6}$$

Si noti che $\mathbf{\Theta}_\beta$, detta *rotazione infinitesima*, è un tensore antisimmetrico poiché

$$\mathbf{R}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{R}_\beta = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{I} + \mathbf{\Theta}_\beta)^\mathsf{T}(\mathbf{I} + \mathbf{\Theta}_\beta) + o(\beta) = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Theta}_\beta^\mathsf{T} + \mathbf{\Theta}_\beta + o(\beta) = \mathbf{O}, \tag{7}$$

mentre $\mathbf{E}_\beta$, detta *dilatazione infinitesima*, è un tensore simmetrico poiché lo è $\mathbf{U}_\beta$.

Alla deformazione (1) corrisponde il campo di spostamento

$$\mathbf{u}_\beta(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) = \mathbf{u}_\beta(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) + (\mathbf{F}_\beta - \mathbf{I})(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}), \tag{8}$$

che per la (6) diventa

$$\mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) = \mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) + (\mathbf{\Theta}_\beta + \mathbf{E}_\beta)(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) + o(\beta). \tag{9}$$

2 Dilatazione infinitesima

Si osservi che per la (4) si ha

$$\frac{\|\mathbf{U}_\beta\,\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}(\mathbf{U}_\beta\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{U}_\beta\,\mathbf{a})^{1/2} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}(\|\mathbf{a}\| + \mathbf{E}_\beta\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) + o(\beta) = 1 + \frac{\mathbf{E}_\beta\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} + o(\beta). \tag{10}$$

Eliminando il pedice β e indicando la matrice di $\mathbf{E}$ in un base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ con

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

per la (10) risulta

$$\frac{\|\mathbf{U}\,\mathbf{e}_1\|}{\|\mathbf{e}_1\|} = 1 + \mathbf{E}\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + o(\beta) = 1 + \varepsilon_{11} + o(\beta). \tag{12}$$

Pertanto, a meno di $o(\beta)$, ε_{11} è l'allungamento nella direzione di $\mathbf{e}_1$, ε_{22} è l'allungamento nella direzione di $\mathbf{e}_2$, ε_{33} è l'allungamento nella direzione di $\mathbf{e}_3$. In corrispondenza della coppia di vettori $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ si ha inoltre

$$\begin{aligned}\mathbf{U}\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{U}\mathbf{e}_2=\mathbf{U}^2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2&=\big(\mathbf{I}+\mathbf{E}+o(\beta)\big)^2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2=\big(\mathbf{I}+2\mathbf{E}+o(\beta)\big)\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\\&=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2+2\mathbf{E}\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2+o(\beta)=2\varepsilon_{21}+o(\beta).\end{aligned}\tag{13}$$

Utilizzando la (12) si ha anche

$$\|\mathbf{U}\,\mathbf{e}_1\|\|\mathbf{U}\,\mathbf{e}_2\|=(1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22})+o(\beta)=1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+o(\beta)\tag{14}$$

$$(\|\mathbf{U}\,\mathbf{e}_1\|\|\mathbf{U}\,\mathbf{e}_2\|)^{-1}=1-\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}+o(\beta).\tag{15}$$

Ne deriva che l'angolo tra i vettori $\mathbf{U}\,\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{U}\,\mathbf{e}_2$ è tale che

$$\cos\big(\frac{\pi}{2}-\gamma_{21}\big)=\frac{\mathbf{U}\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{U}\,\mathbf{e}_2}{\|\mathbf{U}\,\mathbf{e}_1\|\|\mathbf{U}\,\mathbf{e}_2\|}=2\varepsilon_{21}+o(\beta).\tag{16}$$

Poiché $\cos(\frac{\pi}{2}-\gamma_{21})=\sin(\gamma_{21})\simeq\gamma_{21}$, per lo *scorrimento* γ_{21} corrispondente alla coppia di vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ si ottiene

$$\gamma_{21}\simeq 2\varepsilon_{21}.\tag{17}$$

Per la stessa ragione si ha

$$\gamma_{32}\simeq 2\varepsilon_{32},\quad \gamma_{13}\simeq 2\varepsilon_{13}.\tag{18}$$

Si noti che se $\mathbf{u}_i$ è un autovettore di $\mathbf{E}$ e ε_i l'autovalore corrispondente, si ha

$$\mathbf{E}\mathbf{u}_i=\varepsilon_i\mathbf{u}_i\tag{19}$$

e dalla (4)

$$\mathbf{E}\mathbf{u}_i=(\mathbf{U}-\mathbf{I}+o(\beta))\mathbf{u}_i=\varepsilon_i\mathbf{u}_i\quad\Rightarrow\quad\mathbf{U}\mathbf{u}_i=(1+\varepsilon_i)\mathbf{u}_i+o(\beta).\tag{20}$$

Pertanto per β abbastanza piccolo gli autovettori di $\mathbf{U}$ sono vicini agli autovettori di $\mathbf{E}$ mentre le dilatazioni principali sono approssimate dalle espressioni

$$\lambda_i\simeq 1+\varepsilon_i.\tag{21}$$

3 Rotazione infinitesima

L'espansione in serie della rotazione si può costruire nel seguente modo. Si consideri la rotazione come composizione di tre rotazioni (v. APPENDICE 3)

$$\mathbf{R}_\beta=\mathbf{R}_\beta^{(3)}\mathbf{R}_\beta^{(2)}\mathbf{R}_\beta^{(1)}\tag{22}$$

con asse rispettivamente $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ e ampiezze $\theta_\beta^{(1)}$, $\theta_\beta^{(2)}$, $\theta_\beta^{(3)}$, nulle per $\beta=0$ e lineari in β. Considerando ad esempio $\mathbf{R}_\beta^{(1)}$, la sua espansione in serie

$$\mathbf{R}_\beta^{(1)}=\mathbf{I}+\mathbf{\Theta}_\beta^{(1)}+o(\beta)\tag{23}$$

corrisponde all'espansione in serie della sua matrice

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta_\beta^{(1)}&-\sin\theta_\beta^{(1)}\\0&\sin\theta_\beta^{(1)}&\cos\theta_\beta^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\theta_\beta^{(1)}\\0&\theta_\beta^{(1)}&0\end{pmatrix}+o(\beta).\tag{24}$$

Componendo le espansioni in serie si ottiene

$$\mathbf{R}_\beta = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_\beta^{(3)})(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_\beta^{(2)})(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_\beta^{(1)}) + o(\beta) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_\beta^{(3)} + \boldsymbol{\Theta}_\beta^{(2)} + \boldsymbol{\Theta}_\beta^{(1)} + o(\beta). \tag{25}$$

Dalla (3) risulta

$$\boldsymbol{\Theta}_\beta = \boldsymbol{\Theta}_\beta^{(3)} + \boldsymbol{\Theta}_\beta^{(2)} + \boldsymbol{\Theta}_\beta^{(1)} \tag{26}$$

essendo le matrici di $\boldsymbol{\Theta}_\beta^{(3)}$, $\boldsymbol{\Theta}_\beta^{(2)}$, $\boldsymbol{\Theta}_\beta^{(1)}$, rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & -\theta_\beta^{(3)} & 0 \\ \theta_\beta^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_\beta^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\theta_\beta^{(2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_\beta^{(1)} \\ 0 & \theta_\beta^{(1)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

4 Variazione di volume

Per il volume del parallelepipedo di spigoli $\{\mathbf{U}_\beta\mathbf{e}_1, \mathbf{U}_\beta\mathbf{e}_2, \mathbf{U}_\beta\mathbf{e}_3\}$, utilizzando la (4), si ha

$$\begin{aligned} &\mathrm{vol}\,(\mathbf{U}_\beta\mathbf{e}_1, \mathbf{U}_\beta\mathbf{e}_2, \mathbf{U}_\beta\mathbf{e}_3) \\ &\quad = \mathrm{vol}\,((\mathbf{I} + \mathbf{E}_\beta)\mathbf{e}_1, (\mathbf{I} + \mathbf{E}_\beta)\mathbf{e}_2, (\mathbf{I} + \mathbf{E}_\beta)\mathbf{e}_3) + o(\beta) \\ &\quad = \mathrm{vol}\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}\,(\mathbf{E}_\beta\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{E}_\beta\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{E}_\beta\mathbf{e}_3) + o(\beta). \end{aligned} \tag{28}$$

Risulta dunque

$$\det \mathbf{F}_\beta = \frac{\mathrm{vol}\,(\mathbf{U}_\beta\mathbf{e}_1, \mathbf{U}_\beta\mathbf{e}_2, \mathbf{U}_\beta\mathbf{e}_3)}{\mathrm{vol}\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 1 + \mathrm{tr}\,\mathbf{E}_\beta + o(\beta). \tag{29}$$

Pertanto per β abbastanza piccolo è

$$\det \mathbf{F}_\beta \simeq 1 + \mathrm{tr}\,\mathbf{E}_\beta. \tag{30}$$

5 Variazione di area

Consideriamo la faccia $\mathcal{F}$ di un parallelepipedo. Il rapporto tra l'area di tale faccia e l'area della faccia corrispondente $\bar{\mathcal{F}}$ nella configurazione di riferimento è dato da

$$\frac{A_{\mathcal{F}}}{A_{\bar{\mathcal{F}}}} = \|(\mathrm{cof}\,\mathbf{F})\,\bar{\mathbf{n}}\| \tag{31}$$

dove $\mathbf{n}$ il versore normale esterno a $\bar{\mathcal{F}}$. Dall'espansione in serie della precedente espressione, per β sufficientemente piccolo si ha

$$\|(\mathrm{cof}\,\mathbf{F}_\beta)\,\bar{\mathbf{n}}\| \simeq 1 + \mathrm{tr}\,\mathbf{E}_\beta - \mathbf{E}_\beta\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}}\,. \tag{32}$$

6 Linearizzazione della risposta del materiale

La tensione, data dalla funzione di risposta per un materiale elastico, è

$$\mathbf{T}_\beta = \mathbf{R}_\beta\,\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U}_\beta)\,\mathbf{R}_\beta^{\mathsf{T}}. \tag{33}$$

Si consideri l'espansione in serie

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U}_\beta) = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{I} + \mathbf{E}_\beta) = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}) + \mathbb{C}(\mathbf{E}_\beta) + o(\beta), \tag{34}$$

dove $\mathbb{C}$ è la parte lineare di $\widehat{\mathbf{T}}$, risultando cosí $\mathbb{C}(\mathbf{E}_\beta)$ lineare in β. Assumendo [1]

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}) = \mathbf{O}, \tag{35}$$

la (33) diventa

$$\mathbf{T}_\beta = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_\beta)^{\mathsf{T}} \mathbb{C}(\mathbf{E}_\beta)(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_\beta) + o(\beta) = \mathbb{C}(\mathbf{E}_\beta) + o(\beta) \tag{36}$$

7 Forza risultante e momento risultante linearizzati

Lungo una traiettoria dipendente da un parametro di controllo β, descritta dalla (1), la potenza di una forza $\mathbf{f}_{\beta\mathsf{A}}$ applicata nel punto A risulta

$$\mathbf{f}_{\beta\mathsf{A}} \cdot \mathbf{v}_\mathsf{A} = \mathbf{f}_{\beta\mathsf{A}} \cdot \mathbf{v}_\mathsf{O} + \mathbf{F}_\beta(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) \otimes \mathbf{f}_{\beta\mathsf{A}} \cdot \mathbf{L}. \tag{37}$$

Lo sviluppo in serie del momento, assumendo che la forza $\mathbf{f}_{\beta\mathsf{A}}$ sia lineare rispetto a β e nulla per $\beta = 0$, risulta

$$\mathbf{F}_\beta(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) \otimes \mathbf{f}_{\beta\mathsf{A}} = (\mathbf{I} + \mathbf{E}_\beta + \boldsymbol{\Theta}_\beta + o(\beta))(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) \otimes \mathbf{f}_{\beta\mathsf{A}} = (\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) \otimes \mathbf{f}_{\beta\mathsf{A}} + o(\beta) \tag{38}$$

La potenza di una distribuzione di forza $\mathbf{b}_\beta$ su $\mathcal{R}_\beta$ in un campo di velocità $\mathbf{v}$ è

$$\int_{\mathcal{R}_\beta} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v}\, dV \tag{39}$$

Tale integrale si può trasformare in un integrale sulla forma $\bar{\mathcal{R}}$, utilizzando il rapporto tra i volumi (formula generale del cambiamento di variabile)

$$\int_{\mathcal{R}_\beta} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v}\, dV = \int_{\bar{\mathcal{R}}} (\mathbf{b}_\beta \circ \boldsymbol{\phi}) \cdot (\mathbf{v} \circ \boldsymbol{\phi}) \det \mathbf{F}_\beta\, dV \tag{40}$$

che più brevemente si può scrivere

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v}\, dV = \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v} \det \mathbf{F}_\beta\, dV. \tag{41}$$

Utilizzando l'espansione in serie di $\det \mathbf{F}_\beta$ (29) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}_\beta} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v}\, dV &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v}\ (1 + \operatorname{tr} \mathbf{E}_\beta + o(\beta))\, dV \\ &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v}\, dV + \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v}\ \operatorname{tr} \mathbf{E}_\beta\, dV + o(\beta). \end{aligned} \tag{42}$$

Assumendo che $\mathbf{b}_\beta$ sia lineare rispetto a β e nullo per $\beta = 0$, essendo $\mathbf{E}_\beta$ lineare in β risulta

$$\int_{\mathcal{R}_\beta} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v}\, dV = \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v}\, dV + o(\beta). \tag{43}$$

Inoltre dall'espressione del campo di velocità affine

$$\mathbf{v}(\mathsf{p}_\mathsf{A}) = \mathbf{v}_\mathsf{O} + \mathbf{L}\mathbf{F}_\beta(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) \tag{44}$$

[1] Si dice in tal caso che il corpo è in una configurazione *di riposo* o *rilassata*.

si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{R}_\beta} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v}\, dV &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{v}_{\mathsf{O}}\, dV + \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{L}\mathbf{F}_\beta(\boldsymbol{x} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})\, dV + o(\beta) \\ &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}_\beta\, dV \cdot \mathbf{v}_{\mathsf{O}} + \int_{\bar{\mathcal{R}}} (\boldsymbol{x} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) \otimes \mathbf{b}_\beta\, dV \cdot \mathbf{L} \ + o(\beta).\end{aligned} \tag{45}$$

Assumendo che anche $\mathbf{t}_\beta$, come $\mathbf{b}_\beta$, è una funzione lineare in β, nulla in $\beta = 0$, utilizzando la (32) si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{R}_\beta} \mathbf{t}_\beta \cdot \mathbf{v}\, dA &= \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t}_\beta \cdot \mathbf{v}\, \|(\operatorname{cof}\mathbf{F})\, \bar{\mathbf{n}}\|\, dA = \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t}_\beta \cdot \mathbf{v}\, dA \\ &= \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t}_\beta \cdot \mathbf{v}_{\mathsf{O}}\, dA + \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t}_\beta \cdot \mathbf{L}\mathbf{F}_\beta(\boldsymbol{x} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})\, dA + o(\beta) \\ &= \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t}_\beta\, dA \cdot \mathbf{v}_{\mathsf{O}} + \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} (\boldsymbol{x} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) \otimes \mathbf{t}_\beta\, dA \cdot \mathbf{L} \ + o(\beta).\end{aligned} \tag{46}$$

8 Elasticità lineare

La parte lineare di $\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}_\beta)$ data dalla (36) definisce la funzione di risposta della *teoria lineare dell'elasticità*

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}(\mathbf{E}). \tag{47}$$

L'applicazione lineare $\mathbb{C}$ è detta *tensore dell'elasticità*. Poichè tale tensore trasforma tensori simmetrici in tensori simmetrici, esso è descritto da una matrice 6 per in una qualunque base. Affinché esista l'energia elastica si può dimostare che $\mathbb{C}$ deve essere un tensore simmetrico. Pertanto il numero totale di coefficienti (i moduli elastici) necessari a descrivere un materiale risulta $(6 \times 6 - 6)/2 + 6 = 21$. Per materiali *isotropi* questo numero di riduce a 2 e la formula generale della funzione di risposta risulta

$$\mathbb{C}(\mathbf{E}) = \lambda\, \mathrm{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}. \tag{48}$$

Le costanti λ e μ si dicono moduli di Lamè. La rotazione infinitesima e la dilatazione infinitesima si definiscono nel modo seguente

$$\boldsymbol{\Theta} := \operatorname{skw}(\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \operatorname{skw}\nabla\mathbf{u}, \tag{49}$$

$$\mathbf{E} := \operatorname{sym}(\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \operatorname{sym}\nabla\mathbf{u}, \tag{50}$$

dove $\nabla\mathbf{u} = (\mathbf{F} - \mathbf{I})$ è il gradiente dello spostamento. Una deformazione affine infinitesima è descritta dall'espressione

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) + \mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) + (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta} + \mathbf{E})(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) \tag{51}$$

o, in termini di campo di spostamento, dall'espressione

$$\mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}}) = \mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) + (\mathbf{F} - \mathbf{I})(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) = \mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) + (\boldsymbol{\Theta} + \mathbf{E})(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) \tag{52}$$

Riassumiamo la teoria del'eleasticità lineare per un corpo affine. Il principio di bilancio è

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathsf{O}} + \big(\mathbf{M} - \mathbf{T}\, V_{\bar{\mathcal{R}}}\big) \cdot \mathbf{L} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_{\mathsf{O}}, \forall \mathbf{L} \tag{53}$$

da cui derivano le seguenti equazioni di bilancio

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{54}$$

$$\operatorname{skw}\mathbf{M} = \mathbf{O}, \tag{55}$$

$$\operatorname{sym}\mathbf{M} = \mathbf{T}\, V_{\bar{\mathcal{R}}}. \tag{56}$$

La forza risultante e il momento risultante sono dati dalle espressioni

$$\mathbf{f} = \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}\, dV + \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t}\, dA, \tag{57}$$

$$\mathbf{M}_{\mathsf{p_O}} = \int_{\bar{\mathcal{R}}} (\boldsymbol{x} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) \otimes \mathbf{b}\, dV + \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} (\boldsymbol{x} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) \otimes \mathbf{t}\, dA \tag{58}$$

e la funzione di risposta per la tensione $\mathbf{T}$ è data dalla (47). Utilizzando per la matrice di $\mathbf{E}$ l'espressione

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \tag{59}$$

il termine ε_{11} ha il significato di allungamento nella direzione $\mathbf{e}_1$; il termine γ_{12} ha il significato di scorrimento corrispondente alle direzioni $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Utilizzando per la matrice di $\boldsymbol{\Theta}$ l'espressione

$$[\boldsymbol{\Theta}] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

i termini θ_1, θ_2, θ_3 hanno il significato di ampiezza di tre rotazioni infinitesime, rispettivamente con assi $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.