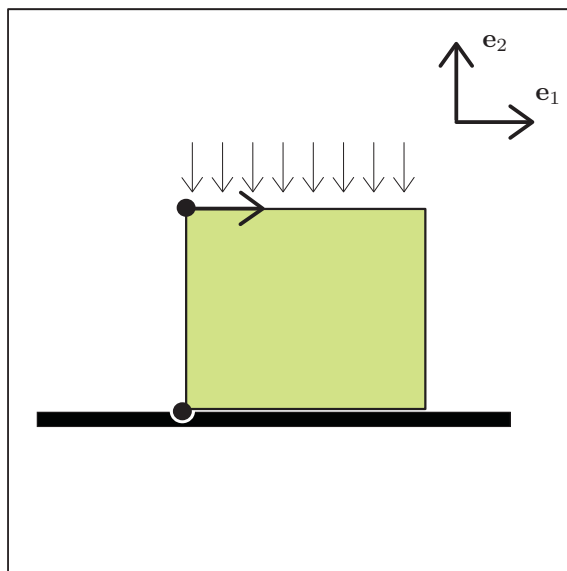


## Corpo affine elastico vincolato



Un corpo a forma di parallelepipedo retto, con spigoli paralleli a  $\mathbf{e}_1$  di lunghezza  $\ell_1$ , spigoli paralleli a  $\mathbf{e}_2$  di lunghezza  $\ell_2$  e spigoli paralleli a  $\mathbf{e}_3$  di lunghezza  $\ell_3$ , sia soggetto ad un sistema di forze costituito da una distribuzione uniforme  $-p\mathbf{e}_2$  sulla faccia superiore e da una distribuzione uniforme sullo spigolo superiore sinistro  $q\mathbf{e}_1$ , come in figura.

Il corpo sia disposto su un supporto rigido in modo che la faccia inferiore possa scorrere ma non possa distaccarsene. Inoltre lo spigolo inferiore sinistro sia vincolato in modo che non possa spostarsi nella direzione  $\mathbf{e}_1$ , come in figura.

Utilizzando il modello di corpo affine e assumendo che il materiale sia elastico e isotropo:

1. descrivere i vincoli sul campo di spostamento e sui campi di velocità test;
2. calcolare la tensione, la dilatazione infinitesima, il campo di spostamento;
3. caratterizzare le forze reattive.

Per una valutazione numerica si considerino i seguenti valori:

$$\ell_1 = 0.2 \text{ m}, \quad \ell_2 = 0.2 \text{ m}, \quad \ell_3 = 0.10 \text{ m}$$

$$p = 10^9 \text{ N/m}^2, \quad q = 10^9 \text{ N/m}$$

$$\lambda = 56 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad \mu = 26 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

Il modulo di Young  $Y$  e il coefficiente di Poisson  $\nu$ , calcolati dai moduli di Lamé attraverso le espressioni che li definiscono

$$Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

valgono in questo caso

$$Y = 69.8 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad \nu = 0.34$$

## Deformazioni vincolate

Una *deformazione affine infinitesima* è descritta  $\forall \bar{\mathbf{p}}_A$  dall'espressione

$$\phi(\bar{\mathbf{p}}_A) = \phi(\bar{\mathbf{p}}_O) + (\mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{\Theta})(\bar{\mathbf{p}}_A - \bar{\mathbf{p}}_O). \quad (1)$$

a cui corrisponde il *campo di spostamento infinitesimo*

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{p}}_A) = \mathbf{u}_O + (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})(\bar{\mathbf{p}}_A - \bar{\mathbf{p}}_O). \quad (2)$$

Scelto  $\bar{\mathbf{p}}_O$  al centro dello spigolo sinistro della faccia inferiore, le posizioni della faccia inferiore sono descritte da

$$\mathbf{x}_{\bar{\mathcal{F}}_2} = \bar{\mathbf{p}}_O + \frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 + z_1 \mathbf{e}_1 + z_3 \mathbf{e}_3 \quad (3)$$

con

$$-\frac{\ell_1}{2} \leq z_1 \leq \frac{\ell_1}{2}, \quad -\frac{\ell_3}{2} \leq z_3 \leq \frac{\ell_3}{2}. \quad (4)$$

Il campo di spostamento sulla faccia inferiore ha pertanto l'espressione

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\bar{\mathcal{F}}_2}) = \mathbf{u}_O + (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta}) \left( \frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 + z_1 \mathbf{e}_1 + z_3 \mathbf{e}_3 \right). \quad (5)$$

La condizione imposta dal vincolo sulla faccia inferiore è

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\bar{\mathcal{F}}_2}) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad (6)$$

ovvero

$$\left( \mathbf{u}_O + (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta}) \left( \frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 + z_1 \mathbf{e}_1 + z_3 \mathbf{e}_3 \right) \right) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad (7)$$

che si scrive più esplicitamente

$$\mathbf{u}_O \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\ell_1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + z_1 (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + z_3 (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad (8)$$

Affinché tale espressione sia nulla  $\forall z_1, \forall z_3$ , deve essere

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_O \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\ell_1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0, \\ (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0, \\ (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Le posizioni dello spigolo sinistro della faccia inferiore sono descritte da

$$\mathbf{x}_{\bar{\mathcal{S}}_{(-2,-1)}} = \bar{\mathbf{p}}_O + z_3 \mathbf{e}_3. \quad (10)$$

Il campo di spostamento su tale spigolo ha pertanto l'espressione

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\bar{\mathcal{S}}_{(-2,-1)}}) = \mathbf{u}_O + (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})(z_3 \mathbf{e}_3). \quad (11)$$

La condizione imposta dal vincolo sullo spigolo è

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\bar{\mathcal{S}}_{(-2,-1)}}) \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad (12)$$

ovvero

$$(\mathbf{u}_O + (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})(z_3 \mathbf{e}_3)) \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad (13)$$

che si scrive più esplicitamente

$$\mathbf{u}_O \cdot \mathbf{e}_1 + z_3(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \quad (14)$$

Affinché tale espressione sia nulla  $\forall z_3$  deve essere

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_O \cdot \mathbf{e}_1 &= 0, \\ (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Indicando le componenti dello spostamento  $\mathbf{u}_O$ , la matrice (simmetrica) della dilatazione infinitesima  $\mathbf{E}$  e la matrice (antisimmetrica) della rotazione infinitesima  $\mathbf{\Theta}$  rispettivamente con

$$[\mathbf{u}_O] = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{\Theta}] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

le (9) e (15) diventano

$$\begin{aligned} u_{02} &= 0, \\ \varepsilon_{21} + \theta_3 &= 0, \\ \varepsilon_{23} - \theta_1 &= 0, \\ u_{01} &= 0, \\ \varepsilon_{13} + \theta_2 &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

dalle quali si ottiene

$$\begin{aligned} u_{01} &= 0, \\ u_{02} &= 0, \\ \theta_3 &= -\varepsilon_{21}, \\ \theta_1 &= \varepsilon_{23}, \\ \theta_2 &= -\varepsilon_{13}. \end{aligned} \quad (18)$$

Le condizioni di vincolo implicano dunque che le componenti di  $\mathbf{u}_O^v$  e la matrice di  $\mathbf{\Theta}^v$  abbiano la seguente forma

$$[\mathbf{u}_O^v] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{03} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{\Theta}^v] = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{21} & -\varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{21} & 0 & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

## Campi di velocità test compatibili con i vincoli

I campi di velocità test, corrispondenti a deformazioni affini infinitesime, sono descritti dall'espressione

$$\mathbf{v}(\bar{\mathbf{p}}_A) = \mathbf{v}_O + \mathbf{L}(\bar{\mathbf{p}}_A - \bar{\mathbf{p}}_O). \quad (20)$$

La velocità sulla faccia inferiore è

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_{\mathcal{F}_2}) = \mathbf{v}_O + \mathbf{L} \left( \frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 + z_1 \mathbf{e}_1 + z_3 \mathbf{e}_3 \right). \quad (21)$$

La condizione imposta dal vincolo è

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_{\mathcal{F}_2}) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad (22)$$

ovvero

$$\left( \mathbf{v}_O + \mathbf{L} \left( \frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 + z_1 \mathbf{e}_1 + z_3 \mathbf{e}_3 \right) \right) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad (23)$$

che si scrive più esplicitamente

$$\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\ell_1}{2} \mathbf{L} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{L} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + z_3 \mathbf{L} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \quad (24)$$

Affinché tale espressione sia nulla  $\forall z_1, \forall z_3$ , deve essere

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\ell_1}{2} \mathbf{L} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0, \\ \mathbf{L} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0, \\ \mathbf{L} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Si noti come queste espressioni corrispondano alle (9). La velocità lungo lo spigolo sinistro della faccia inferiore è

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_{\bar{S}_{(-2,-1)}}) = \mathbf{v}_O + \mathbf{L}(z_3 \mathbf{e}_3). \quad (26)$$

La condizione imposta dal vincolo è

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_{\bar{S}_{(-2,-1)}}) \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad (27)$$

ovvero

$$(\mathbf{v}_O + \mathbf{L}(z_3 \mathbf{e}_3)) \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad (28)$$

che si scrive più esplicitamente

$$\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{e}_1 + z_3 \mathbf{L} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \quad (29)$$

Affinché tale espressione sia nulla  $\forall z_3$  deve essere

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{e}_1 &= 0, \\ \mathbf{L} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Si noti come queste espressioni corrispondano alle (15). In un campo di velocità *compatibile con i vincoli* la terna delle componenti di  $\mathbf{v}_O$  e la matrice del gradiente della velocità hanno dunque in generale la forma

$$[\mathbf{v}_O^v] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{03} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{L}^v] = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ 0 & v_{22} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \quad (31)$$

## Risultante e momento risultante delle forze applicate

La forza risultante è

$$\mathbf{f}^a = \int_{\bar{\mathcal{F}}_2} (-p \mathbf{e}_2) dA + \int_{\bar{S}_{(-1,2)}} (q \mathbf{e}_1) dl = -p \ell_1 \ell_3 \mathbf{e}_2 + q \ell_3 \mathbf{e}_1 \quad (32)$$

La posizione del baricentro della faccia superiore è

$$\mathbf{c}_{\bar{\mathcal{F}}_2} = \bar{\mathbf{p}}_O + \frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 + \ell_2 \mathbf{e}_2. \quad (33)$$

La posizioni del baricentro dello spigolo sinistro della faccia superiore è

$$\mathbf{c}_{\bar{S}_{(-1,2)}} = \bar{\mathbf{p}}_O + \ell_2 \mathbf{e}_2. \quad (34)$$

Pertanto il tensore momento ha l'espressione

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\mathbf{p}_0}^a &= \int_{\bar{\mathcal{F}}_2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{p}}_0) \otimes (-p\mathbf{e}_2) dA + \int_{\bar{\mathcal{S}}_{(-1,2)}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{p}}_0) \otimes (q\mathbf{e}_1) d\ell \\
&= A_{\bar{\mathcal{F}}_2} (\mathbf{c}_{\bar{\mathcal{F}}_2} - \bar{\mathbf{p}}_0) \otimes (-p\mathbf{e}_2) + \ell_{\bar{\mathcal{S}}_{(-1,2)}} (\mathbf{c}_{\bar{\mathcal{S}}_{(-1,2)}} - \bar{\mathbf{p}}_0) \otimes (q\mathbf{e}_1) \\
&= A_{\bar{\mathcal{F}}_2} \left( \frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 + \ell_2 \mathbf{e}_2 \right) \otimes (-p\mathbf{e}_2) + \ell_{\bar{\mathcal{S}}_{(-1,2)}} (\ell_2 \mathbf{e}_2) \otimes (q\mathbf{e}_1) \\
&= -p\ell_1\ell_3 \left( \frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \ell_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \right) + q\ell_3\ell_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1
\end{aligned} \tag{35}$$

a cui corrisponde la matrice

$$[\mathbf{M}_{\mathbf{p}_0}^a] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q}{\ell_1} & 0 \\ -\frac{\ell_1}{2\ell_2}p & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ell_1\ell_2\ell_3. \tag{36}$$

## Principio di bilancio e tensione

Il principio di bilancio afferma che deve essere nulla la somma della potenza esterna e della potenza interna per qualsiasi campo di velocità test. In particolare, essendo nulla la potenza delle forze reattive in campi di velocità compatibili con i vincoli, deve essere

$$\mathbf{f}^a \cdot \mathbf{v}_0^v + (\mathbf{M}_{\mathbf{p}_0}^a - \mathbf{T} V_{\bar{\mathcal{R}}}) \cdot \mathbf{L}^v = 0. \tag{37}$$

Risultando in questo caso

$$\mathbf{f}^a \cdot \mathbf{v}_0^v = 0, \tag{38}$$

occorre richiedere che sia

$$(\mathbf{M}_{\mathbf{p}_0}^a - \mathbf{T} \ell_1\ell_2\ell_3) \cdot \mathbf{L}^v = 0. \tag{39}$$

Indicando la matrice (simmetrica) della tensione con

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

il principio di bilancio si scrive

$$-\ell_1\ell_2\ell_3 \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} - \frac{q}{\ell_1} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} + \frac{\ell_1}{2\ell_2}p & \sigma_{22} + p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ 0 & v_{22} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = 0 \tag{41}$$

Espandendo il prodotto scalare si ottiene

$$-\ell_1\ell_2\ell_3 \left( \sigma_{11}v_{11} + \left( \sigma_{12} - \frac{q}{\ell_1} \right) v_{12} + (\sigma_{22} + p)v_{22} + \sigma_{31}v_{31} + \sigma_{32}v_{32} + \sigma_{33}v_{33} \right) = 0 \tag{42}$$

Questa condizione deve valere per qualsiasi valore dei parametri  $v_{ij}$ . Considerando a turno uno solo di tali parametri diverso da zero, in particolare uguale ad 1, si ottiene

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 0, \\ \sigma_{12} - \frac{q}{\ell_1} &= 0, \\ \sigma_{22} + p &= 0, \\ \sigma_{31} &= 0, \\ \sigma_{32} &= 0, \\ \sigma_{33} &= 0.\end{aligned}\tag{43}$$

Essendo  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ , la tensione risulta completamente determinata e la sua matrice è

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q}{\ell_1} & 0 \\ \frac{q}{\ell_1} & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{44}$$

### Risposta del materiale

La dilatazione infinitesima deve essere tale che la funzione di risposta del materiale fornisca la tensione richiesta per bilanciare le forze esterne. L'espressione fornita dalla funzione di risposta per un materiale elastico isotropo è

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu} \left( \mathbf{T} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \text{tr}(\mathbf{T})\mathbf{I} \right).\tag{45}$$

Poiché dalla tensione calcolata risulta

$$\text{tr}(\mathbf{T}) = -p\tag{46}$$

si ottiene

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \frac{\lambda p}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & \frac{q}{2\mu\ell_1} & 0 \\ \frac{q}{2\mu\ell_1} & -\frac{(\lambda + \mu)p}{\mu(3\lambda + 2\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda p}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \end{pmatrix}.\tag{47}$$

Utilizzando al posto dei moduli di Lamè il modulo di Young  $Y$  e il coefficiente di Poisson  $\nu$  l'espressione fornita dalla funzione di risposta diventa

$$\mathbf{E} = \frac{1}{Y} \left( (1 + \nu)\mathbf{T} - \nu \text{tr}(\mathbf{T})\mathbf{I} \right).\tag{48}$$

Dalla tensione calcolata si ottiene

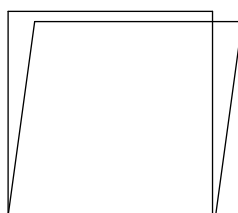
$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \nu \frac{p}{Y} & \frac{(1 + \nu) q}{Y \ell_1} & 0 \\ \frac{(1 + \nu) q}{Y \ell_1} & -\frac{p}{Y} & 0 \\ 0 & 0 & \nu \frac{p}{Y} \end{pmatrix}.\tag{49}$$

## Campo di spostamento e deformazione

Dai risultati precedenti si ottiene infine il gradiente del campo di spostamento che conviene scrivere per brevità, assieme al vettore  $\mathbf{u}_O$ , nella forma seguente

$$[\mathbf{u}_O] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{03} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{E} + \mathbf{\Theta}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 2\varepsilon_{12} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (50)$$

ottenuta dalla (19) sommando alla matrice della rotazione infinitesima la matrice della dilatazione infinitesima e sostituendo solo i termini nulli di  $\mathbf{E}$  (le espressioni degli altri termini si possono trovare nella (47)). Attraverso la valutazione della (2) in corrispondenza dei vertici si ottiene la seguente rappresentazione della deformazione



in cui gli spostamenti sono stati amplificati per renderli visibili.

## Forze reattive

In generale il principio di bilancio deve valere per qualsiasi campo di velocità test, prescindendo dai vincoli. Ad esso corrispondono le equazioni di bilancio che comprendono sia le forze applicate che le forze reattive, attraverso la forza risultante e il momento risultante,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^a + \mathbf{f}^r &= \mathbf{o}, \\ \mathbf{M}_{p_o}^a + \mathbf{M}_{p_o}^r &= \mathbf{T} V_{\mathcal{R}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Queste equazioni permettono ora di calcolare

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^r &= -\mathbf{f}^a = p\ell_1\ell_3 \mathbf{e}_2 - q\ell_3 \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{M}_{p_o}^r &= \mathbf{T} \ell_1\ell_2\ell_3 - \mathbf{M}_{p_o}^a, \end{aligned} \quad (52)$$

da cui

$$[\mathbf{M}_{p_o}^r] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{q}{\ell_1} + \frac{\ell_1}{2\ell_2}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ell_1\ell_2\ell_3. \quad (53)$$

Un esempio di forze reattive che hanno tale forza risultante e tale momento risultante è costituito da una distribuzione uniforme  $-q^r \mathbf{e}_1$  lungo lo spigolo sinistro della faccia inferiore e da una distribuzione  $p^r \mathbf{e}_2$  sulla faccia inferiore con

$$\begin{aligned} q^r &= q, \\ p^r &= 12q \frac{\ell_2}{\ell_1^3} z_1 + p, \quad -\frac{\ell_1}{2} \leq s_1 \leq \frac{\ell_1}{2}. \end{aligned} \quad (54)$$

Si noti che la distribuzione di forza sulla faccia inferiore non è uniforme ma lineare in  $z_1$ . La forza risultante è

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^r &= \int_{\bar{\mathcal{F}}_2} (p^r \mathbf{e}_2) dA + \int_{\bar{\mathcal{S}}_{(-1,2)}} (-q^r \mathbf{e}_1) d\ell \\
 &= \int_{-\frac{\ell_3}{2}}^{\frac{\ell_3}{2}} \int_{-\frac{\ell_1}{2}}^{\frac{\ell_1}{2}} \left( 12q \frac{\ell_2}{\ell_1^3} z_1 + p \right) \mathbf{e}_2 dz_1 dz_3 + \int_{-\frac{\ell_3}{2}}^{\frac{\ell_3}{2}} (-q \mathbf{e}_1) dz_3 \\
 &= p\ell_1\ell_3 - q\ell_3 \mathbf{e}_1.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Il momento risultante è

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\mathbf{p}0}^r &= \int_{\bar{\mathcal{F}}_2} (\mathbf{x}_{\bar{\mathcal{F}}_2} - \bar{\mathbf{p}}0) \otimes (p^r \mathbf{e}_2) dA + \int_{\bar{\mathcal{S}}_{(-1,2)}} (\mathbf{x}_{\bar{\mathcal{S}}_{(-1,2)}} - \bar{\mathbf{p}}0) \otimes (-q^r \mathbf{e}_1) d\ell \\
 &= \int_{-\frac{\ell_3}{2}}^{\frac{\ell_3}{2}} \int_{-\frac{\ell_1}{2}}^{\frac{\ell_1}{2}} \left( \frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 + z_1 \mathbf{e}_1 + z_3 \mathbf{e}_3 \right) \otimes \left( \left( 12q \frac{\ell_2}{\ell_1^3} z_1 + p \right) \mathbf{e}_2 \right) dz_1 dz_3 \\
 &= q\ell_2\ell_3 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + p\ell_1\ell_3 \frac{\ell_1}{2} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = \ell_1\ell_2\ell_3 \left( \frac{q}{\ell_1} + \frac{\ell_1}{2\ell_2} p \right) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2).
 \end{aligned} \tag{56}$$