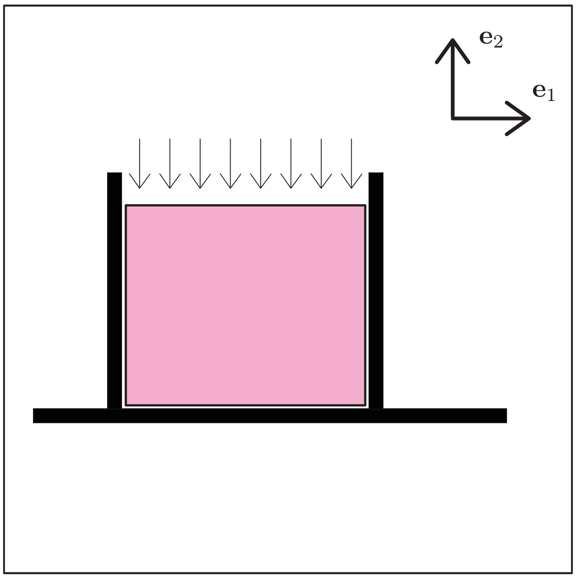
Corpo affine elastico vincolato



Un corpo a forma di parallelepipedo, con spigoli paralleli a $\mathbf{e}_1$ di lunghezza ℓ_1, spigoli paralleli a $\mathbf{e}_2$ di lunghezza ℓ_2 e spigoli paralleli a $\mathbf{e}_3$ di lunghezza ℓ_3, sia soggetto ad un sistema di forze costituito da una distribuzione uniforme $-p\mathbf{e}_2$ sulla faccia superiore, come in figura.

Il corpo sia disposto in un contenitore rigido in modo che la faccia superiore resti libera e le altre facce possano scorrere ma non distaccarsi dalla superficie del contenitore.

Utilizzando il modello di corpo affine e assumendo che il materiale sia elastico e isotropo:

1. descrivere i vincoli sul campo di spostamento e sui campi di velocità test;
2. calcolare la tensione, la dilatazione infinitesima, il campo di spostamento;
3. caratterizzare le forze reattive.

Per una valutazione numerica si considerino i seguenti valori:

$$\ell_1 = 0.2\ m, \quad \ell_2 = 0.2\ m, \quad \ell_3 = 0.20\ m$$

$$p = 10^9 N/m^2, \quad q = 10^9 N/m$$

$$\lambda = 56 \times 10^9 N/m^2, \quad \mu = 26 \times 10^9 N/m^2$$

Il modulo di Young Y e il coefficiente di Poisson ν, calcolati dai moduli di Lamé attraverso le espressioni che li definiscono

$$Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

valgono in questo caso

$$Y = 69.8 \times 10^9 N/m^2, \quad \nu = 0.34$$

Deformazioni vincolate

Una *deformazione affine infinitesima* è descritta $\forall \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}$ dall'espressione

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) + (\mathbf{I} + \mathbf{E} + \boldsymbol{\Theta})(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}). \tag{1}$$

a cui corrisponde il *campo di spostamento infinitesimo*

$$\mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) = \mathbf{u}_\mathsf{O} + (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Theta})(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}). \tag{2}$$

Scelto $\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}$ al centro della faccia inferiore, le posizioni delle facce inferiore, anteriore, posteriore, destra, sinistra, sono descritte rispettivamente da

$$\begin{align}
\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{-2}} &= \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O} + z_1\mathbf{e}_1 + z_3\mathbf{e}_3 \tag{3}\\
\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{3}} &= \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O} + \frac{\ell_3}{2}\mathbf{e}_3 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 \tag{4}\\
\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{-3}} &= \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O} - \frac{\ell_3}{2}\mathbf{e}_3 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 \tag{5}\\
\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{1}} &= \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O} + \frac{\ell_1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3 \tag{6}\\
\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{-1}} &= \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O} - \frac{\ell_1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3 \tag{7}
\end{align}$$

con

$$-\frac{\ell_1}{2} \le z_1 \le \frac{\ell_1}{2}, \quad -\frac{\ell_2}{2} \le z_2 \le \frac{\ell_2}{2}, \quad -\frac{\ell_3}{2} \le z_3 \le \frac{\ell_3}{2}. \tag{8}$$

Le condizioni imposte dai vincoli sulle facce sono

$$\begin{align}
\mathbf{u}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{-2}}) \cdot \mathbf{e}_2 &= 0, \tag{9}\\
\mathbf{u}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{3}}) \cdot \mathbf{e}_3 &= 0, \tag{10}\\
\mathbf{u}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{-3}}) \cdot \mathbf{e}_3 &= 0, \tag{11}\\
\mathbf{u}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{1}}) \cdot \mathbf{e}_1 &= 0, \tag{12}\\
\mathbf{u}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{-1}}) \cdot \mathbf{e}_1 &= 0, \tag{13}
\end{align}$$

che si scrivono più esplicitamente

$$\begin{align}
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_2 + z_1(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + z_3(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0, \tag{14}\\
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_3 + \frac{\ell_3}{2}(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 + z_1(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + z_2(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 &= 0, \tag{15}\\
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_3 - \frac{\ell_3}{2}(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 + z_1(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + z_2(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 &= 0, \tag{16}\\
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\ell_1}{2}(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + z_3(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= 0, \tag{17}\\
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{\ell_1}{2}(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + z_3(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= 0. \tag{18}
\end{align}$$

Affinché tali espressioni sia nulle $\forall z_1$, $\forall z_2$, $\forall z_3$, deve essere

$$\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{19}$$
$$\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{20}$$
$$\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \tag{21}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{22}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{23}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{24}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{25}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{26}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \tag{27}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \tag{28}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \tag{29}$$

Indicando le componenti dello spostamento $\mathbf{u}_\mathsf{O}$, la matrice (simmetrica) della dilatazione infinitesima $\mathbf{E}$ e la matrice (antisimmetrica) della rotazione infinitesima $\mathbf{\Theta}$ rispettivamente con

$$[\mathbf{u}_\mathsf{O}] = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{\Theta}] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} u_{01} &= 0, \\ u_{02} &= 0, \\ u_{03} &= 0, \\ \varepsilon_{21} + \theta_3 &= 0, \\ \varepsilon_{23} - \theta_1 &= 0, \\ \varepsilon_{11} &= 0, \\ \varepsilon_{12} - \theta_3 &= 0, \\ \varepsilon_{13} + \theta_2 &= 0, \\ \varepsilon_{31} - \theta_2 &= 0, \\ \varepsilon_{32} + \theta_1 &= 0, \\ \varepsilon_{33} &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Le condizioni di vincolo implicano dunque che le componenti di $\mathbf{u}_\mathsf{O}^\mathrm{v}$ e le matrici di $\mathbf{E}^\mathrm{v}$ e $\mathbf{\Theta}^\mathrm{v}$ abbiano la seguente forma

$$[\mathbf{u}_\mathsf{O}^\mathrm{v}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{E}^\mathrm{v}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{\Theta}^\mathrm{v}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Campi di velocità test compatibili con i vincoli

I campi di velocità test, corrispondenti a deformazioni affini infinitesime, sono descritti dall'espressione

$$\mathbf{v}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) = \mathbf{v}_\mathsf{O} + \mathbf{L}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}). \tag{33}$$

Per le condizioni imposte dai vincoli deve essere

$$\mathbf{v}_{\mathsf{O}} \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{34}$$
$$\mathbf{v}_{\mathsf{O}} \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{35}$$
$$\mathbf{v}_{\mathsf{O}} \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \tag{36}$$
$$\mathbf{L}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{37}$$
$$\mathbf{L}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{38}$$
$$\mathbf{L}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{39}$$
$$\mathbf{L}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{40}$$
$$\mathbf{L}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{41}$$
$$\mathbf{L}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \tag{42}$$
$$\mathbf{L}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \tag{43}$$
$$\mathbf{L}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \tag{44}$$

In un campo di velocità *compatibile con i vincoli* la terna delle componenti di $\mathbf{v}_{\mathsf{O}}$ e la matrice del gradiente della velocità hanno dunque in generale la forma

$$[\mathbf{v}^{\mathrm{v}}_{\mathsf{O}}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{L}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Risultante e momento risultante delle forze applicate

La forza risultante è

$$\mathbf{f}^a = \int_{\bar{\mathcal{F}}_2} (-p\mathbf{e}_2)\, dA = -p\ell_1\ell_3\, \mathbf{e}_2. \tag{46}$$

La posizione del baricentro della faccia superiore è data da

$$\boldsymbol{c}_{\bar{\mathcal{F}}_2} = \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + \ell_2\mathbf{e}_2. \tag{47}$$

Pertanto il tensore momento ha l'espressione

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^a_{\mathsf{p}_{\mathsf{O}}} &= \int_{\bar{\mathcal{F}}_2} (\boldsymbol{x} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) \otimes (-p\mathbf{e}_2)\, dA = A_{\bar{\mathcal{F}}_2}(\boldsymbol{c}_{\bar{\mathcal{F}}_2} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) \otimes (-p\mathbf{e}_2) \\ &= A_{\bar{\mathcal{F}}_2}(\ell_2\mathbf{e}_2) \otimes (-p\mathbf{e}_2) = -p\ell_1\ell_2\ell_3\, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{48}$$

a cui corrisponde la matrice

$$[\mathbf{M}^a_{\mathsf{p}_{\mathsf{O}}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ell_1\ell_2\ell_3. \tag{49}$$

Principio di bilancio

Il principio di bilancio afferma che deve essere nulla la somma della potenza esterna e della potenza interna per qualsiasi campo di velocità test. In particolare, essendo nulla la potenza delle forze reattive in campi di velocità compatibili con i vincoli, deve essere

$$\mathbf{f}^a \cdot \mathbf{v}^{\mathrm{v}}_{\mathsf{O}} + \left(\mathbf{M}^a_{\mathsf{p}_{\mathsf{O}}} - \mathbf{T}\, V_{\bar{\mathcal{R}}}\right) \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{v}} = 0. \tag{50}$$

In questo caso occorre richiedere che sia

$$-(\sigma_{22} + p)v_{22} = 0. \tag{51}$$

La tensione risulta solo parzialmente determinata dalle condizioni di bilancio e la sua matrice può essere descritta nel modo seguente

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & -p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Si noti che la indeterminatezza di $\mathbf{T}$ dipende dal fatto che un numero eccessivo di elementi della matrice di $\mathbf{L}^{\mathrm{v}}$ è nullo.

Se il numero delle condizioni di vincolo fosse stato inferiore si sarebbero ottenute, attraverso il principio di bilancio, più equazioni di bilancio. In particolare, per ogni condizione di vincolo in meno su $\mathbf{L}^{\mathrm{v}}$ si sarebbe ottenuta un'equazione di bilancio in più.

Risposta del materiale

La funzione di risposta svolge un duplice ruolo: se è nota la dilatazione infinitesima, fornisce il valore della tensione; se è nota la tensione fornisce, attraverso la sua inversa, la dilatazione infinitesima corrispondente. In questo caso conviene utilizzare direttamente l'espressione

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \tag{53}$$

che, per i valori calcolati, fornisce le seguenti equazioni

$$\sigma_{11} = \lambda\varepsilon_{22}, \tag{54}$$
$$\sigma_{12} = 0, \tag{55}$$
$$\sigma_{13} = 0, \tag{56}$$
$$-p = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22}, \tag{57}$$
$$\sigma_{23} = 0, \tag{58}$$
$$\sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{22}, \tag{59}$$

da cui si ottiene

$$\varepsilon_{22} = -\frac{p}{\lambda + 2\mu}, \tag{60}$$
$$\sigma_{11} = -\frac{\lambda p}{\lambda + 2\mu}, \tag{61}$$
$$\sigma_{12} = 0, \tag{62}$$
$$\sigma_{13} = 0, \tag{63}$$
$$\sigma_{23} = 0, \tag{64}$$
$$\sigma_{33} = -\frac{\lambda p}{\lambda + 2\mu}. \tag{65}$$

La tensione e la dilatazione infinitesima risultano pertanto completamente determinate e le loro matrici sono

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda p}{\lambda + 2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda p}{\lambda + 2\mu} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{p}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Utilizzando al posto dei moduli di Lamè il modulo di Young Y e il coefficiente di Poisson ν l'espressione della funzione di risposta diventa

$$\mathbf{T} = \frac{Y}{1+\nu}\Big(\frac{\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{E})\,\mathbf{I} + \mathbf{E}\Big), \tag{67}$$

ottenendo così

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} -\dfrac{\nu p}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\nu p}{1-\nu} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{p(1+\nu)(1-2\nu)}{Y(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Forze reattive

In generale il principio di bilancio deve valere per qualsiasi campo di velocità test, prescindendo dai vincoli. Ad esso corrispondono le equazioni di bilancio che comprendono sia le forze applicate che le forze reattive, attraverso la forza risultante e il momento risultante,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^a + \mathbf{f}^r &= \mathbf{o}, \\ \mathbf{M}^a_{\mathsf{p_O}} + \mathbf{M}^r_{\mathsf{p_O}} &= \mathbf{T}\,V_{\bar{\mathcal{R}}}. \end{aligned} \tag{69}$$

Queste equazioni permettono ora di calcolare

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^r &= -\mathbf{f}^a = p\ell_1\ell_3\,\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{M}^r_{\mathsf{p_O}} &= \mathbf{T}\,\ell_1\ell_2\ell_3 - \mathbf{M}^a_{\mathsf{p_O}}, \end{aligned} \tag{70}$$

da cui

$$[\mathbf{M}^r_{\mathsf{p_O}}] = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda p}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda p}{\lambda+2\mu} \end{pmatrix} \ell_1\ell_2\ell_3. \tag{71}$$