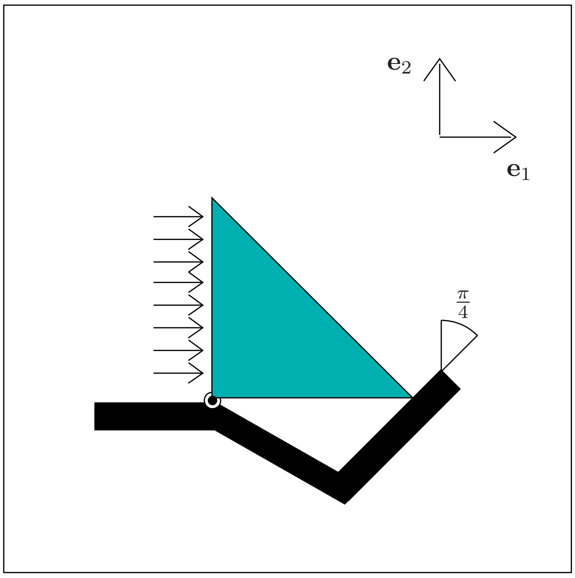
Corpo affine elastico vincolato



Un corpo a forma di prisma retto di sezione triangolare, con spigoli paralleli a $\mathbf{e}_1$ di lunghezza ℓ_1, spigoli paralleli a $\mathbf{e}_2$ di lunghezza ℓ_2 e spigoli paralleli a $\mathbf{e}_3$ di lunghezza ℓ_3, sia soggetto ad un sistema di forze costituito da una distribuzione uniforme $p\mathbf{e}_1$ sulla faccia sinistra, come in figura.

Il corpo sia disposto su un supporto rigido in modo che lo spigolo inferiore sinistro possa solo scorrere in una guida lungo $\mathbf{e}_3$, mentre lo spigolo in basso a destra sia vincolato a scorrere sul piano di normale $\mathbf{n} = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$, come in figura.

Utilizzando il modello di corpo affine e assumendo che il materiale sia elastico e isotropo:

1. descrivere i vincoli sul campo di spostamento e sugli atti di moto;
2. calcolare la tensione, la dilatazione infinitesima, il campo di spostamento;
3. caratterizzare le forze reattive.

Deformazioni vincolate

Una *deformazione affine infinitesima* è descritta $\forall \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}}$ dall'espressione

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) + (\mathbf{I} + \mathbf{E} + \boldsymbol{\Theta})(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}). \tag{1}$$

a cui corrisponde il *campo di spostamento infinitesimo*

$$\mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}}) = \mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Theta})(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}). \tag{2}$$

Scelto $\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}$ al centro dello spigolo sinistro della faccia inferiore, le posizioni dello spigolo sinistro della faccia inferiore sono descritte da

$$\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{(-2,-1)}} = \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + z_3\mathbf{e}_3. \tag{3}$$

Il campo di spostamento su tale spigolo ha pertanto l'espressione

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{(-2,-1)}}) = \mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Theta})(z_3\mathbf{e}_3). \tag{4}$$

La condizione imposta dal vincolo sullo spigolo è

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{(\text{-}2,\text{-}1)}}) \cdot \mathbf{e}_1 &= 0,\\
\mathbf{u}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{(\text{-}2,\text{-}1)}}) \cdot \mathbf{e}_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
\big(\mathbf{u}_\mathsf{O} + (\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})(z_3\mathbf{e}_3)\big) \cdot \mathbf{e}_1 &= 0,\\
\big(\mathbf{u}_\mathsf{O} + (\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})(z_3\mathbf{e}_3)\big) \cdot \mathbf{e}_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{6}
$$

che si scrive più esplicitamente

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_1 + z_3(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= 0,\\
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_2 + z_3(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{7}
$$

Affinché tali espressioni siano nulle $\forall z_3$ deve essere

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_1 &= 0,\\
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_2 &= 0,\\
(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= 0,\\
(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Le posizioni dello spigolo destro della faccia inferiore sono descritte da

$$
\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{(\text{-}2,1)}} = \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O} + \ell_1\mathbf{e}_1 + z_3\mathbf{e}_3. \tag{9}
$$

Il campo di spostamento su tale spigolo ha pertanto l'espressione

$$
\mathbf{u}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{(\text{-}2,1)}}) = \mathbf{u}_\mathsf{O} + (\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})(\ell_1\mathbf{e}_1 + z_3\mathbf{e}_3). \tag{10}
$$

La condizione imposta dal vincolo sullo spigolo è

$$
\mathbf{u}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{F}}_{(\text{-}2,1)}}) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 0, \tag{11}
$$

ovvero

$$
(\mathbf{u}_\mathsf{O} + (\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})(\ell_1\mathbf{e}_1 + z_3\mathbf{e}_3)) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 0, \tag{12}
$$

che si scrive più esplicitamente

$$
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + \ell_1(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + z_3(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 0. \tag{13}
$$

Affinché tale espressione sia nulla $\forall z_3$ deve essere

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_1 + \ell_1(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 &= \mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_2 + \ell_1(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2,\\
(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= (\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Le (8) e (14) si riducono alle

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_1 &= 0,\\
\mathbf{u}_\mathsf{O} \cdot \mathbf{e}_2 &= 0,\\
(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= 0,\\
(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0,\\
(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 &= (\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Indicando le componenti dello spostamento $\mathbf{u}_O$, la matrice (simmetrica) della dilatazione infinitesima $\mathbf{E}$ e la matrice (antisimmetrica) della rotazione infinitesima $\boldsymbol{\Theta}$ rispettivamente con

$$[\mathbf{u}_O] = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{\Theta}] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

le (15) diventano

$$\begin{aligned} u_{01} &= 0, \\ u_{02} &= 0, \\ \varepsilon_{13} + \theta_2 &= 0, \\ \varepsilon_{23} - \theta_1 &= 0, \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{21} + \theta_3, \end{aligned} \tag{17}$$

dalle quali si ottiene

$$\begin{aligned} u_{01} &= 0, \\ u_{02} &= 0, \\ \theta_2 &= -\varepsilon_{13}, \\ \theta_1 &= \varepsilon_{23}, \\ \theta_3 &= \varepsilon_{11} - \varepsilon_{21}. \end{aligned} \tag{18}$$

Le condizioni di vincolo implicano dunque che le componenti di $\mathbf{u}_O^{\mathrm{v}}$ e la matrice di $\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{v}}$ abbiano la seguente forma

$$[\mathbf{u}_O^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{03} \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{11} - \varepsilon_{21} & 0 & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Campi di velocità test compatibili con i vincoli

I campi di velocità test, corrispondenti a deformazioni affini infinitesime, sono descritti dall'espressione

$$\mathbf{v}(\bar{\mathsf{p}}_A) = \mathbf{v}_O + \mathbf{L}(\bar{\mathsf{p}}_A - \bar{\mathsf{p}}_O). \tag{20}$$

La velocità lungo lo spigolo sinistro della faccia inferiore è

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{S}}_{(-2,-1)}}) = \mathbf{v}_O + \mathbf{L}(z_3\mathbf{e}_3). \tag{21}$$

La condizione imposta dal vincolo è

$$\begin{aligned} \big(\mathbf{v}_O + \mathbf{L}(z_3\mathbf{e}_3)\big) \cdot \mathbf{e}_1 &= 0, \\ \big(\mathbf{v}_O + \mathbf{L}(z_3\mathbf{e}_3)\big) \cdot \mathbf{e}_2 &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

che si scrive più esplicitamente

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{e}_1 + z_3\mathbf{L}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= 0, \\ \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{L}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Affinché tale espressioni siano nulle $\forall z_3$ deve essere

$$\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{24}$$
$$\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{25}$$
$$\mathbf{L}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{26}$$
$$\mathbf{L}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \tag{27}$$

Si noti come queste espressioni corrispondano alle (8). La velocità lungo lo spigolo destro della faccia inferiore è

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{x}_{\bar{\mathcal{S}}_{(-2,1)}}) = \mathbf{v}_{\mathsf{O}} + \mathbf{L}(\ell_1\mathbf{e}_1 + z_3\mathbf{e}_3). \tag{28}$$

La condizione imposta dal vincolo è

$$\big(\mathbf{v}_{\mathsf{O}} + \mathbf{L}(\ell_1\mathbf{e}_1 + z_3\mathbf{e}_3)\big)\cdot(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 0. \tag{29}$$

Affinché tale espressione sia nulla $\forall z_3$ deve essere

$$\mathbf{v}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_1 + \ell_1\mathbf{L}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_2 + \ell_1\mathbf{L}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2, \tag{30}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{L}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2. \tag{31}$$

Si noti come queste espressioni corrispondano alle (14). Le condizioni imposte dai vincoli sono pertanto

$$\mathbf{v}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{32}$$

$$\mathbf{v}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_2 = 0, \tag{33}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{34}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 = 0, \tag{35}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{L}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 \tag{36}$$

dalle quali si ottiene

$$v_{01} = 0, \tag{37}$$

$$v_{02} = 0, \tag{38}$$

$$v_{13} = 0, \tag{39}$$

$$v_{23} = 0, \tag{40}$$

$$v_{21} = v_{11}. \tag{41}$$

In un atto di moto *compatibile con i vincoli* la terna delle componenti di $\mathbf{v}_{\mathsf{O}}$ e la matrice del gradiente della velocità hanno dunque in generale la forma

$$[\mathbf{v}_{\mathsf{O}}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{L}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{11} & v_{22} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Risultante e momento risultante delle forze applicate

La forza risultante è

$$\mathbf{f}^a = \int_{\bar{\mathcal{F}}_{-1}} (p\mathbf{e}_1)\,dA = p\ell_2\ell_3\,\mathbf{e}_1 \tag{43}$$

La posizione del baricentro della faccia sinistra è

$$\boldsymbol{c}_{\bar{\mathcal{F}}_{-1}} = \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2\,. \tag{44}$$

Pertanto il tensore momento ha l'espressione

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^a_{\mathsf{p}_{\mathsf{O}}} &= \int_{\bar{\mathcal{F}}_{-1}} (\boldsymbol{x} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})\otimes(p\mathbf{e}_1)\,dA = A_{\bar{\mathcal{F}}_{-1}}(\boldsymbol{c}_{\bar{\mathcal{F}}_{-1}} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})\otimes(p\mathbf{e}_1)\,dA \\ &= A_{\bar{\mathcal{F}}_{-1}}(\frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2)\otimes(p\mathbf{e}_1)\,dA = p\frac{\ell_2^2\ell_3}{2}\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1\end{aligned} \tag{45}$$

a cui corrisponde la matrice

$$[\mathbf{M}^a_{\mathsf{po}}] = \begin{pmatrix} 0 & p\dfrac{\ell_2}{\ell_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\ell_1 \ell_2 \ell_3}{2}. \tag{46}$$

Principio di bilancio e tensione

Il principio di bilancio afferma che deve essere nulla la somma della potenza esterna e della potenza interna per qualsiasi campo di velocità test. In particolare, essendo nulla la potenza delle forze reattive in campi di velocità compatibili con i vincoli, deve essere

$$\mathbf{f}^a \cdot \mathbf{v}^{\mathsf{v}}_{\mathsf{O}} + \left(\mathbf{M}^a_{\mathsf{po}} - \mathbf{T}\, V_{\bar{\mathcal{R}}}\right) \cdot \mathbf{L}^{\mathsf{v}} = 0. \tag{47}$$

Indicando la matrice (simmetrica) della tensione con

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

il principio di bilancio si scrive

$$\begin{pmatrix} \dfrac{p}{\ell_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{03} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} - p\dfrac{\ell_2}{\ell_1} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{11} & v_{22} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = 0 \tag{49}$$

Questa condizione deve valere per qualsiasi valore dei parametri v_{ij}. Considerando a turno uno solo di tali parametri diverso da zero, in particolare uguale ad 1, si ottiene

$$(\sigma_{11} + \sigma_{21}) = 0, \quad (\sigma_{12} - p\frac{\ell_2}{\ell_1}) = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = 0. \tag{50}$$

Essendo $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathsf{T}}$, la tensione risulta completamente determinata e la sua matrice è

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} -p\dfrac{\ell_2}{\ell_1} & p\dfrac{\ell_2}{\ell_1} & 0 \\ p\dfrac{\ell_2}{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Risposta del materiale

La dilatazione infinitesima deve essere tale che la funzione di risposta del materiale fornisca la tensione richiesta per bilanciare le forze esterne. L'espressione fornita dalla funzione di risposta per un materiale elastico isotropo è

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}\Big(\mathbf{T} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{T})\mathbf{I}\Big). \tag{52}$$

Poiché dalla tensione calcolata risulta

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{T}) = -p\frac{\ell_2}{\ell_1} \tag{53}$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu}\left(-1+\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\right)p\frac{\ell_2}{\ell_1}\\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu}p\frac{\ell_2}{\ell_1}\\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\right)p\frac{\ell_2}{\ell_1}\\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\right)p\frac{\ell_2}{\ell_1}\\
\varepsilon_{13} &= 0\\
\varepsilon_{23} &= 0
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Campo di spostamento e deformazione

Dai risultati precedenti si ottiene infine il gradiente del campo di spostamento che conviene scrivere per brevità, assieme al vettore $\mathbf{u}_{\mathsf{O}}$, nella forma seguente

$$
[\mathbf{u}_{\mathsf{O}}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{03} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{E}+\mathbf{\Theta}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{11}+2\varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{55}
$$

ottenuta dalla (19) sommando alla matrice della rotazione infinitesima la matrice della dilatazione infinitesima e sostituendo solo i termini nulli di $\mathbf{E}$ (le espressioni degli altri termini si possono trovare nella (54)).

Forze reattive

In generale il principio di bilancio deve valere per qualsiasi campo di velocità test, prescindendo dai vincoli. Ad esso corrispondono le equazioni di bilancio che comprendono sia le forze applicate che le forze reattive, attraverso la forza risultante e il momento risultante,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}^a + \mathbf{f}^r &= \mathbf{o},\\
\mathbf{M}^a_{\mathsf{po}} + \mathbf{M}^r_{\mathsf{po}} &= \mathbf{T}\, V_{\bar{\mathcal{R}}}.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Queste equazioni permettono ora di calcolare

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}^r &= p\ell_2\ell_3\,\mathbf{e}_1,\\
\mathbf{M}^r_{\mathsf{po}} &= \mathbf{T}\, V_{\bar{\mathcal{R}}} - \mathbf{M}^a_{\mathsf{po}}.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

da cui

$$
[\mathbf{M}^r_{\mathsf{po}}] = \begin{pmatrix} -p\frac{\ell_2}{\ell_1} & 0 & 0 \\ p\frac{\ell_2}{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\ell_1\ell_2\ell_3}{2}. \tag{58}
$$