Travi (L)

Indice

1 Deformazioni

Una trave è un corpo le cui deformazioni $\boldsymbol{\phi} : \bar{\mathcal{R}} \to \mathcal{R}$ ammettono la seguente rappresentazione

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)) + \mathbf{R}(\zeta_1)\big(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - \bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)\big), \tag{1}$$

essendo $\mathbf{R}(\zeta_1)$ una rotazione e $\bar{\mathbf{x}}$ una parametrizzazione di $\bar{\mathcal{R}}$ tale che

$$\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1) + \zeta_2\, \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) + \zeta_3\, \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1), \tag{2}$$

$$\bar{\mathbf{x}}_o'(\zeta_1) = \bar{\mathbf{a}}_1(\zeta_1), \tag{3}$$

con $\{\bar{\mathbf{a}}_1(\zeta_1), \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1), \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1)\}$ base ortonormale.

Per la (2) la (1) può anche scriversi

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)) + \mathbf{R}(\zeta_1)\big(\zeta_2\, \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) + \zeta_3\, \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1)\big). \tag{4}$$

Si dice *asse* in $\bar{\mathcal{R}}$ la curva $\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)$, che viene trasformata da $\boldsymbol{\phi}$ nell'asse $\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1))$ in $\mathcal{R}$.

Si dice *sezione* in $\bar{\mathcal{R}}$ la porzione di piano $(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2\,(\zeta_1) + \zeta_3\, \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1))$, che viene trasformata da $\boldsymbol{\phi}$ nella sezione $\mathbf{R}(\zeta_1)(\zeta_2\, \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) + \zeta_3\, \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1))$ in $\mathcal{R}$.

La (3) esprime la condizione di ortogonalità delle sezioni rispetto all'asse nella forma $\bar{\mathcal{R}}$. In generale questa proprietà non è conservata da $\boldsymbol{\phi}$.

Alla (1) corrisponde la descrizione della deformazione in termini di spostamento

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)) + \big(\mathbf{R}(\zeta_1) - \mathbf{I}\big)\big(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - \bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)\big). \tag{5}$$

Si noti che per un fissato valore di ζ_1 la (1) è una deformazione rigida. Per questo si dice che le sezioni si deformano rigidamente.

Per la (1) si può usare la notazione sintetica

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_o) + \mathbf{R}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o). \tag{6}$$

Definendo

$$\mathbf{x}_o := \boldsymbol{\phi} \circ \bar{\mathbf{x}}_o, \tag{7}$$

$$\mathbf{u}_o := \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{x}}_o, \tag{8}$$

$$\mathbf{x} := \boldsymbol{\phi} \circ \bar{\mathbf{x}}, \tag{9}$$

le (1) e (5) si scrivono anche

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \mathbf{R}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o), \tag{10}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_o + (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o). \tag{11}$$

Si assumerà nel seguito che $\bar{\mathcal{R}}$ sia un cilindro con asse

$$\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1) = \bar{\mathbf{x}}_o(0) + \zeta_1\, \bar{\mathbf{a}}_1, \qquad \zeta_1 \in [0, L], \tag{12}$$

e che $\bar{\mathbf{a}}_1$, $\bar{\mathbf{a}}_2$, $\bar{\mathbf{a}}_3$ siano costanti.

1.1 Configurazioni e deformazioni (definizioni alternative)

Una trave è un corpo la cui forma generica $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ è l'immagine di una funzione regolare e biunivoca

$$\mathcal{C} : [0, L] \times \mathcal{S} \to \mathcal{R}, \tag{13}$$

essendo $\mathcal{S}$ una porzione di superficie in $\mathcal{E}$ orientata e piana, tale che comunque si scelga $\mathbf{y}_\circ \in \mathcal{S}$ per ogni $\mathbf{y} \in \mathcal{S}$ risulti

$$\mathcal{C}(\zeta, \mathbf{y}) = \mathcal{C}(\zeta, \mathbf{y}_\circ) + \mathcal{Q}(\zeta)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_\circ) \tag{14}$$

essendo $\mathcal{Q}(\zeta)$ una rotazione.[1] La curva $\mathcal{C}(\zeta, \mathbf{y}_\circ)$ si dice *asse*, l'immagine di $\mathcal{C}$ per un fissato valore di ζ si dice *sezione*.

Indicando con $\bar{\mathcal{R}}$ una particolare forma, a cui corrisponde

$$\bar{\mathcal{C}}(\zeta, \mathbf{y}) = \bar{\mathcal{C}}(\zeta, \mathbf{y}_\circ) + \bar{\mathcal{Q}}(\zeta)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_\circ), \tag{15}$$

le deformazioni

$$\boldsymbol{\phi} : \bar{\mathcal{C}}(\zeta, \mathbf{y}) \mapsto \mathcal{C}(\zeta, \mathbf{y}) \tag{16}$$

ponendo

$$\mathbf{R}(\zeta) := \mathcal{Q}(\zeta)\bar{\mathcal{Q}}(\zeta)^{\mathsf{T}}, \tag{17}$$

ammettono, attraverso la (14) e la (15), la seguente rappresentazione

$$\boldsymbol{\phi}\big(\bar{\mathcal{C}}(\zeta, \mathbf{y})\big) = \boldsymbol{\phi}\big(\bar{\mathcal{C}}(\zeta, \mathbf{y}_\circ)\big) + \mathbf{R}(\zeta)\big(\bar{\mathcal{C}}(\zeta, \mathbf{y}) - \bar{\mathcal{C}}(\zeta, \mathbf{y}_\circ)\big). \tag{18}$$

Si assuma che $\det \nabla\boldsymbol{\phi}$ sia positivo ovunque.

Scelto $\mathbf{y}_\circ \in \mathcal{S}$, poiché $\bar{\mathcal{Q}}(\zeta_1)$ è una rotazione, si può porre per ogni $\mathbf{y}$

$$\bar{\mathcal{Q}}(\zeta_1)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_\circ) = \zeta_2\bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) + \zeta_3\bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1), \tag{19}$$

con $\bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1), \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1)$ vettori ortonormali, che assieme al vettore $\bar{\mathbf{a}}_1(\zeta_1) := \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) \times \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1)$ costituiscono una base ortonormale $\{\bar{\mathbf{a}}_1(\zeta_1), \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1), \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1)\}$. La (19) corrisponde alla scelta di un sistema di coordinate cartesiano su $\mathcal{S}$ con origine in $\mathbf{y}_\circ$ e tale che ad ogni $\mathbf{y}$ corrisponda la coppia di coordinate (ζ_2, ζ_3). Ponendo

$$\bar{\mathbf{x}}_\circ(\zeta_1) := \bar{\mathcal{C}}(\zeta_1, \mathbf{y}_\circ), \tag{20}$$

la (15) diventa

$$\bar{\mathcal{C}}(\zeta, \mathbf{y}) = \bar{\mathbf{x}}_\circ(\zeta_1) + \zeta_2\bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) + \zeta_3\bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1). \tag{21}$$

Risulta così definita la parametrizzazione $\bar{\mathbf{x}}$ di $\bar{\mathcal{R}}$ tale che

$$\bar{\mathcal{C}}(\zeta, \mathbf{y}) = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \bar{\mathbf{x}}_\circ(\zeta_1) + \zeta_2\bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) + \zeta_3\bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1), \tag{22}$$

Ponendo inoltre

$$\mathbf{x}_\circ(\zeta_1) := \boldsymbol{\phi}\big(\bar{\mathcal{C}}(\zeta_1, \mathbf{y}_\circ)\big), \tag{23}$$

[1] Si genera $\mathcal{R}$ facendo delle repliche di una stessa figura piana e disponendole lungo una curva, allo stesso modo in cui si possono infilare un gran numero di *paillette* tutte uguali facendone una collana.

la corrispondente parametrizzazione $\mathbf{x}$ di $\mathcal{R}$, attraverso la (18) e la (21), risulta

$$\mathcal{C}(\zeta, \mathbf{y}) = \mathbf{x}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \mathbf{x}_o(\zeta_1) + \mathbf{R}(\zeta_1)\big(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1)\big). \tag{24}$$

Definendo

$$\mathbf{a}_1(\zeta_1) := \mathbf{R}(\zeta_1)\bar{\mathbf{a}}_1(\zeta_1), \quad \mathbf{a}_2(\zeta_1) := \mathbf{R}(\zeta_1)\bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1), \quad \mathbf{a}_3(\zeta_1) := \mathbf{R}(\zeta_1)\bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1), \tag{25}$$

la (24) diventa

$$\mathbf{x}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \mathbf{x}_o(\zeta_1) + \zeta_2 \mathbf{a}_2(\zeta_1) + \zeta_3 \mathbf{a}_3(\zeta_1). \tag{26}$$

Si assuma che $\bar{\mathcal{C}}$ sia tale che $\bar{\mathbf{x}}_o'(\zeta_1) = \bar{\mathbf{a}}_1(\zeta_1)$, condizione di ortogonalità delle sezioni rispetto all'asse. In generale questa proprietà non è conservata da $\boldsymbol{\phi}$.

2 Atti di moto test

In un moto la velocità risulta, dalla (10),

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_o + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o). \tag{27}$$

Pertanto gli atti di moto sono descritti dai campi vettoriali

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_o + \mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o), \tag{28}$$

con $\mathbf{W}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{W}$. Dalla (28) si ottiene per il gradiente della velocità, utilizzando la (4),

$$\mathbf{G}\mathbf{x}' = \mathbf{w}_o' + \mathbf{W}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_o') + \mathbf{W}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o), \tag{29}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{a}_2 = \mathbf{W}\mathbf{a}_2, \tag{30}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{a}_3 = \mathbf{W}\mathbf{a}_3, \tag{31}$$

avendo definito la base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ come

$$\mathbf{a}_1 := \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1, \quad \mathbf{a}_2 := \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \quad \mathbf{a}_3 := \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3. \tag{32}$$

3 Modello di Timoshenko

Si osservi dalla (28) che i descrittori degli atti di moto sono le funzioni $(\mathbf{w}_o, \mathbf{W})$ e dalle (29), (30) e (31) che i descrittori del gradiente degli atti di moto sono le funzioni $(\mathbf{w}_o', \mathbf{W}, \mathbf{W}')$. Utilizzando il vettore assiale di $\mathbf{W}$ si possono sostituire tali descrittori rispettivamente con $(\mathbf{w}_o, \boldsymbol{\omega})$ e $(\mathbf{w}_o', \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')$.

Tutte queste funzioni hanno come dominio l'intervallo $[0, L]$. La potenza esterna, descrivendo sia una distribuzione di "volume" che una distribuzione al "bordo", assume in questo caso la espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \boldsymbol{\omega}) = &\int_0^L (\mathsf{b} \cdot \mathbf{w}_o + \mathsf{c} \cdot \boldsymbol{\omega})\ d\zeta \\ &+ \mathsf{s}^- \cdot \mathbf{w}_o(0) + \mathsf{m}^- \cdot \boldsymbol{\omega}(0) + \mathsf{s}^+ \cdot \mathbf{w}_o(L) + \mathsf{m}^+ \cdot \boldsymbol{\omega}(L), \end{aligned} \tag{33}$$

mentre la potenza interna ha la espressione

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_{\mathsf{o}}, \boldsymbol{\omega}) = -\int_0^L \big(\mathbf{s}\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}}' + \mathbf{z}\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega}'\big)\ d\zeta. \tag{34}$$

Sommando la (33) e la (34) la potenza totale in un atto di moto test risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_{\mathsf{o}}, \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_{\mathsf{o}}, \boldsymbol{\omega}) = &\int_0^L (\mathsf{b}\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}} + \mathsf{c}\cdot\boldsymbol{\omega})\ d\zeta\\ &+ \mathsf{s}^-\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}}(0) + \mathsf{m}^-\cdot\boldsymbol{\omega}(0) + \mathsf{s}^+\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}}(L) + \mathsf{m}^+\cdot\boldsymbol{\omega}(L)\\ &- \int_0^L \big(\mathbf{s}\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}}' + \mathbf{z}\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega}'\big)\ d\zeta.\end{aligned} \tag{35}$$

Attraverso la integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int_0^L \big(\mathbf{s}\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}}' + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega}'\big)\ d\zeta = -&\int_0^L \big(\mathbf{s}'\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}} + \mathbf{m}'\cdot\boldsymbol{\omega}\big)\ d\zeta\\ &+ \mathbf{s}(L)\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}}(L) + \mathbf{m}(L)\cdot\boldsymbol{\omega}(L)\\ &- \mathbf{s}(0)\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}}(0) - \mathbf{m}(0)\cdot\boldsymbol{\omega}(0),\end{aligned} \tag{36}$$

la (35) diventa

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_{\mathsf{o}}, \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_{\mathsf{o}}, \boldsymbol{\omega}) = &\int_0^L \big((\mathbf{s}' + \mathsf{b})\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}} + (\mathbf{m}' - \mathbf{z} + \mathsf{c})\cdot\boldsymbol{\omega}\big)\ d\zeta\\ &+ \big(\mathsf{s}^- + \mathbf{s}(0)\big)\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}}(0) + \big(\mathsf{m}^- + \mathbf{m}(0)\big)\cdot\boldsymbol{\omega}(0)\\ &+ \big(\mathsf{s}^+ - \mathbf{s}(L)\big)\cdot\mathbf{w}_{\mathsf{o}}(L) + \big(\mathsf{m}^+ - \mathbf{m}(L)\big)\cdot\boldsymbol{\omega}(L).\end{aligned} \tag{37}$$

La condizione che *la potenza virtuale sia nulla per ogni atto di moto* fornisce le equazioni differenziali di bilancio

$$\mathbf{s}' + \mathsf{b} = \mathbf{o}, \tag{38}$$
$$\mathbf{m}' - \mathbf{z} + \mathsf{c} = \mathbf{o}, \tag{39}$$

assieme alle equazioni di bilancio al bordo

$$\mathsf{s}^- + \mathbf{s}(0) = \mathbf{o}, \tag{40}$$
$$\mathsf{m}^- + \mathbf{m}(0) = \mathbf{o}, \tag{41}$$
$$\mathsf{s}^+ - \mathbf{s}(L) = \mathbf{o}, \tag{42}$$
$$\mathsf{m}^+ - \mathbf{m}(L) = \mathbf{o}. \tag{43}$$

Un atto di moto rigido può in generale avere la seguente rappresentazione

$$\mathbf{w}_{\mathsf{o}}(\zeta) = \overline{\mathbf{w}}_{\mathsf{o}} + \overline{\boldsymbol{\omega}}\times\big(\mathbf{x}_{\mathsf{o}}(\zeta) - \mathbf{x}_{\mathsf{o}}(0)\big), \tag{44}$$
$$\boldsymbol{\omega}(\zeta) = \overline{\boldsymbol{\omega}}, \tag{45}$$

da cui, derivando, si ottiene

$$\mathbf{w}_o'(\zeta) = \overline{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}_o'(\zeta), \tag{46}$$
$$\boldsymbol{\omega}'(\zeta) = \mathbf{o}. \tag{47}$$

Dalla condizione che *per ogni atto di moto rigido la densità di potenza interna sia nulla* si ha

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}_o' + \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' = 0 \tag{48}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{s} \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}_o' + \mathbf{z} \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{x}_o' \times \mathbf{s} + \mathbf{z}) \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z} = -\mathbf{x}_o' \times \mathbf{s}. \tag{49}$$

Le equazioni di bilancio diventano dunque

$$\mathbf{s}' + \mathsf{b} = \mathbf{o}, \tag{50}$$
$$\mathbf{m}' + \mathbf{x}_o' \times \mathbf{s} + \mathsf{c} = \mathbf{o}, \tag{51}$$

mentre la potenza interna (34) assume la forma

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = -\int_0^L \left(\mathbf{s} \cdot (\mathbf{w}_o' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_o') + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}'\right) \, d\zeta. \tag{52}$$

3.1 Componenti della tensione

Utilizzando la base (32) sia

$$\mathbf{s} = N\,\mathbf{a}_1 + Q_2\,\mathbf{a}_2 + Q_3\,\mathbf{a}_3. \tag{53}$$

La componente N si dice *forza normale* mentre le componenti Q_2 e Q_3 si dicono *forze di taglio*. Per il vettore momento si pone

$$\mathbf{m} = M_1\,\mathbf{a}_1 + M_2\,\mathbf{a}_2 + M_3\,\mathbf{a}_3. \tag{54}$$

La componente M_1 si dice *momento torcente* mentre le componenti M_2 e M_3 si dicono *momenti flettenti*.

3.2 Linearizzazione

Nelle equazioni di bilancio (50) e (51) l'unico termine da linearizzare è $\mathbf{x}_o' \times \mathbf{s}$. Se si linearizza in corrispondenza di uno stato naturale, allora resta solo il termine di ordine zero di $\mathbf{x}_o'$. Essendo $\bar{\mathbf{x}}_o' = \bar{\mathbf{a}}_1$, si ottiene

$$\mathbf{s}' + \mathsf{b} = \mathbf{o}, \tag{55}$$
$$\mathbf{m}' + \bar{\mathbf{a}}_1 \times \mathbf{s} + \mathsf{c} = \mathbf{o}. \tag{56}$$

La (52) diventa

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = -\int_0^L \left(\mathbf{s} \cdot (\mathbf{w}_o' - \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{a}}_1) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}'\right) \, d\zeta. \tag{57}$$

Le espressioni di $\mathbf{s}$ e $\mathbf{m}$ (53) e (54), essendo nulla la parte di ordine zero di ciascuna componente, risultano rispettivamente

$$\mathbf{s} = N\,\bar{\mathbf{a}}_1 + Q_2\,\bar{\mathbf{a}}_2 + Q_3\,\bar{\mathbf{a}}_3, \tag{58}$$
$$\mathbf{m} = M_1\,\bar{\mathbf{a}}_1 + M_2\,\bar{\mathbf{a}}_2 + M_3\,\bar{\mathbf{a}}_3. \tag{59}$$

4 Modello di filo

Per un filo può essere adottato un modello derivato da quello della trave assumendo che sia nulla la potenza, sia esterna che interna, corrispondente a $\boldsymbol{\omega}$. La potenza esterna assume dunque la espressione

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o) = \int_0^L \mathsf{b}\cdot\mathbf{w}_o\,d\zeta + \mathsf{s}^-\cdot\mathbf{w}_o(0) + \mathsf{s}^+\cdot\mathbf{w}_o(L), \tag{60}$$

mentre la potenza interna è

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o) = -\int_0^L \mathbf{s}\cdot\mathbf{w}_o'\,d\zeta. \tag{61}$$

Sommando la (60) e la (61) la potenza totale in un atto di moto test risulta

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o) = \int_0^L \mathsf{b}\cdot\mathbf{w}_o\,d\zeta + \mathsf{s}^-\cdot\mathbf{w}_o(0) + \mathsf{s}^+\cdot\mathbf{w}_o(L) - \int_0^L \mathbf{s}\cdot\mathbf{w}_o'\,d\zeta. \tag{62}$$

Attraverso la integrazione per parti

$$\int_0^L \mathbf{s}\cdot\mathbf{w}_o'\,d\zeta = -\int_0^L \mathbf{s}'\cdot\mathbf{w}_o\,d\zeta + \mathbf{s}(L)\cdot\mathbf{w}_o(L) - \mathbf{s}(0)\cdot\mathbf{w}_o(0), \tag{63}$$

la (62) diventa

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o) = &\int_0^L (\mathbf{s}' + \mathsf{b})\cdot\mathbf{w}_o\,d\zeta\\ &+ \big(\mathsf{s}^- + \mathbf{s}(0)\big)\cdot\mathbf{w}_o(0) + \big(\mathsf{s}^+ - \mathbf{s}(L)\big)\cdot\mathbf{w}_o(L).\end{aligned} \tag{64}$$

La condizione che *la potenza virtuale sia nulla per ogni atto di moto* fornisce la equazione differenziale di bilancio

$$\mathbf{s}' + \mathsf{b} = \mathbf{o}, \tag{65}$$

assieme alle equazioni di bilancio al bordo

$$\mathsf{s}^- + \mathbf{s}(0) = \mathbf{o}, \tag{66}$$
$$\mathsf{s}^+ - \mathbf{s}(L) = \mathbf{o}. \tag{67}$$

Un atto di moto rigido può in generale avere la seguente rappresentazione

$$\mathbf{w}_o(\zeta) = \overline{\mathbf{w}}_o + \overline{\boldsymbol{\omega}}\times\big(\mathbf{x}_o(\zeta) - \mathbf{x}_o(0)\big), \tag{68}$$

da cui, derivando, si ottiene

$$\mathbf{w}'_{\mathsf{o}}(\zeta) = \overline{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}'_{\mathsf{o}}(\zeta). \tag{69}$$

Dalla condizione che *per ogni atto di moto rigido la densità di potenza interna sia nulla* si ha

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_{\mathsf{o}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s} \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}'_{\mathsf{o}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}'_{\mathsf{o}} \times \mathbf{s} \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}'_{\mathsf{o}} \times \mathbf{s} = \mathbf{o}. \tag{70}$$

Dunque la risposta del materiale deve essere tale che il vettore $\mathbf{s}(\zeta)$ risulti in ogni punto tangente alla curva descritta da $\mathbf{x}_{\mathsf{o}}$.

5 Confronto con il continuo di Cauchy

Si restringono le deformazioni e gli atti di moto test del continuo di Cauchy a quelli descritti nei paragrafi 1 e 2. Le espressioni della potenza forniscono una interpretazione sia dei descrittori delle distribuzioni di forze che dei descrittori della tensione del modello di trave di Timoshenko.

5.1 Gradiente della deformazione

Si considerino le curve corrispondenti per $\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ e $\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3))$

$$\bar{\mathbf{c}}_1(h) = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1 + h, \zeta_2, \zeta_3), \tag{71}$$

$$\mathbf{c}_1(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1 + h, \zeta_2, \zeta_3)). \tag{72}$$

I rispettivi vettori tangenti sono

$$\bar{\mathbf{c}}'_1(0) = \bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{x}}'_{\mathsf{o}} = \bar{\mathbf{a}}_1, \tag{73}$$

$$\mathbf{c}'_1(0) = \mathbf{x}' = \mathbf{x}'_{\mathsf{o}} + \mathbf{R}'(\zeta_2\, \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3\, \bar{\mathbf{a}}_3). \tag{74}$$

Le curve

$$\bar{\mathbf{c}}_2(h) = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2 + h, \zeta_3), \tag{75}$$

$$\mathbf{c}_2(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2 + h, \zeta_3)), \tag{76}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_3(h) = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 + h), \tag{77}$$

$$\mathbf{c}_3(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 + h)), \tag{78}$$

hanno vettori tangenti, rispettivamente,

$$\bar{\mathbf{c}}'_2(0) = \bar{\mathbf{a}}_2, \tag{79}$$

$$\mathbf{c}'_2(0) = \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \tag{80}$$

$$\bar{\mathbf{c}}'_3(0) = \bar{\mathbf{a}}_3, \tag{81}$$

$$\mathbf{c}'_3(0) = \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3. \tag{82}$$

Per il gradiente della deformazione $\mathbf{F}$ si ha pertanto

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{x}' = \mathbf{x}_o' + \mathbf{R}'(\zeta_2\,\bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3\,\bar{\mathbf{a}}_3) = \mathbf{R}\big(\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{x}_o' + \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}'(\zeta_2\,\bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3\,\bar{\mathbf{a}}_3)\big), \tag{83}$$

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \tag{84}$$

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3. \tag{85}$$

Ponendo

$$\mathbf{x}' = \lambda\,\mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2\mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2 + \alpha_3\mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3, \tag{86}$$

senza calcolare esplicitamente le espressioni di tali componenti in termini dei descrittori della deformazione $\mathbf{x}_o$, $\mathbf{R}$ e delle loro derivate, la (83) diventa

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{R}(\lambda\bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2\bar{\mathbf{a}}_2 + \alpha_3\bar{\mathbf{a}}_3). \tag{87}$$

Dalla definizione e dalle proprietà del determinante risulta, utilizzando le (87), (84) e (85),

$$\begin{aligned}\det\mathbf{F} &= \frac{\operatorname{vol}(\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_1, \mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_2, \mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_3)}{\operatorname{vol}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3)} = \frac{\operatorname{vol}(\mathbf{R}(\lambda\bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2\bar{\mathbf{a}}_2 + \alpha_3\bar{\mathbf{a}}_3), \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3)}{\operatorname{vol}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3)} \\ &= \frac{\operatorname{vol}(\lambda\,\mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1, \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3)}{\operatorname{vol}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3)} = \lambda\frac{\operatorname{vol}(\mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1, \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3)}{\operatorname{vol}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3)} = \lambda.\end{aligned} \tag{88}$$

La condizione $\det\mathbf{F} > 0$ è pertanto equivalente alla condizione

$$\lambda > 0 \tag{89}$$

che, avendo posto nella (32) $\mathbf{a}_1 := \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1$, può essere anche espressa, per la (86), come

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{a}_1 > 0. \tag{90}$$

Si noti che tale condizione deve essere soddisfatta da $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3))$ ovunque.

5.2 Matrice del gradiente della deformazione

Al fine di esprimere la matrice del gradiente della deformazione in termini dei descrittori della deformazione $\mathbf{x}_o$, $\mathbf{R}$ e delle loro derivate, si ponga

$$\mathbf{x}_o' = (1+\varepsilon)\,\mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1 + \gamma_2\mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2 + \gamma_3\mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3, \tag{91}$$

e si indichi la matrice di $\mathbf{\Gamma} := \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}'$ nella base $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$, con

$$[\mathbf{\Gamma}] = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & -\chi_1 \\ -\chi_2 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{92}$$

Ne deriva che, nella (83),

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{x}_o' + \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}'(\zeta_2\,\bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3\,\bar{\mathbf{a}}_3) \\ &\quad = (1+\varepsilon)\,\bar{\mathbf{a}}_1 + \gamma_2\bar{\mathbf{a}}_2 + \gamma_3\bar{\mathbf{a}}_3 + \zeta_2(-\chi_3\,\bar{\mathbf{a}}_1 + \chi_1\,\bar{\mathbf{a}}_3) + \zeta_3(\chi_2\,\bar{\mathbf{a}}_1 - \chi_1\,\bar{\mathbf{a}}_2) \\ &\quad = (1+\varepsilon - \zeta_2\chi_3 + \zeta_3\chi_2)\,\bar{\mathbf{a}}_1 + (\gamma_2 - \zeta_3\chi_1)\bar{\mathbf{a}}_2 + (\gamma_3 + \zeta_2\chi_1)\bar{\mathbf{a}}_3.\end{aligned} \tag{93}$$

Pertanto la matrice di $\mathbf{F}$ nella base $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$ risulta, dalle (83), (84) e (85),

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{R}] \left(\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 1 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\zeta_2\,\chi_3 + \zeta_3\,\chi_2 & 0 & 0 \\ -\zeta_3\,\chi_1 & 0 & 0 \\ \zeta_2\,\chi_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \tag{94}$$

È bene notare che tale espressione non corrisponde alla decomposizione polare di $\mathbf{F}$, non avendo il termine che moltiplica $[\mathbf{R}]$ le proprietà di una dilatazione.

Si noti che le grandezze scalari introdotte ε, γ_2, γ_3, χ_1, χ_2, χ_3 dipendono solo da ζ_1 e che dal confronto della (93) con la (86) risulta

$$\det \mathbf{F} = \lambda = 1 + \varepsilon(\zeta_1) - \zeta_2\,\chi_3(\zeta_1) + \zeta_3\,\chi_2(\zeta_1). \tag{95}$$

Le componenti del vettore (91) possono essere messe in relazione con le componenti dello spostamento $\mathbf{u}_\circ$ nel seguente modo. Dalla definizione di spostamento

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_\circ) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\circ) - \bar{\mathbf{x}}_\circ \tag{96}$$

si ottiene, utilizzando la (3),

$$\mathbf{u}'_\circ = \mathbf{x}'_\circ - \bar{\mathbf{a}}_1. \tag{97}$$

Ponendo

$$\mathbf{u}_\circ = u_{\circ 1}\,\bar{\mathbf{a}}_1 + u_{\circ 2}\,\bar{\mathbf{a}}_2 + u_{\circ 3}\,\bar{\mathbf{a}}_3, \tag{98}$$

e osservando che, per la (91)

$$\mathbf{x}'_\circ = \mathbf{R}\big((1+\varepsilon)\,\bar{\mathbf{a}}_1 + \gamma_2\bar{\mathbf{a}}_2 + \gamma_3\bar{\mathbf{a}}_3\big), \tag{99}$$

alla (97) corrisponde la seguente relazione tra le componenti nella base $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$

$$\begin{pmatrix} u'_{\circ 1} \\ u'_{\circ 2} \\ u'_{\circ 3} \end{pmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{100}$$

Le espressioni di χ_1, χ_2 e χ_3 in termini dei descrittori di $\mathbf{R}$ dipendono dalla parametrizzazione utilizzata per le rotazioni e non sono in generale semplici.

5.3 Distribuzioni di forza e classi di equipotenza

Si consideri la espressione della potenza esterna

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{w}\; dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t}\cdot\mathbf{w}\; dA, \tag{101}$$

con $\mathbf{w}$ dato dalla espressione (28). In corrispondenza di una deformazione $\boldsymbol{\phi} : \bar{\mathcal{R}} \to \mathcal{R}$ in cui $\bar{\mathcal{R}}$ sia un cilindro si ha, essendo dalla (88) $\det \mathbf{F} = \lambda$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{R}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{w}\; dV &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{w} \det\mathbf{F}\; dV \\ &= \int_0^L \int_{\mathcal{S}} \mathbf{b}\,\lambda\; dA\;\cdot \mathbf{w}_\circ\; d\zeta + \int_0^L \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_\circ)\otimes\mathbf{b}\,\lambda\; dA\;\cdot \mathbf{W}\; d\zeta\end{aligned} \tag{102}$$

Assumendo che $\mathbf{t}$ sia assegnato solo sulle facce d'estremità, si ha

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t}\cdot\mathbf{w}\,dA = \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t}\cdot\mathbf{w}\,dA = \int_{\mathcal{S}^-} \mathbf{t}\,dA\cdot\mathbf{w}_o(0) + \int_{\mathcal{S}^-} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_o)\otimes\mathbf{t}\,dA\cdot\mathbf{W}(0),$$
$$+\int_{\mathcal{S}^+} \mathbf{t}\,dA\cdot\mathbf{w}_o(L) + \int_{\mathcal{S}^+} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_o)\otimes\mathbf{t}\,dA\cdot\mathbf{W}(L) \tag{103}$$

Introducendo come descrittori di classi di equipotenza per le distribuzioni di forza di volume

$$\mathsf{b} := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{b}\,\lambda\,dA, \tag{104}$$

$$\mathsf{c} := \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_o)\times\mathbf{b}\,\lambda\,dA, \tag{105}$$

e come descrittori di classi di equipotenza per le distribuzioni di forza superficiali, in corrispondenza delle estremità destra e sinistra,

$$\mathsf{s}^{\pm} := \int_{\mathcal{S}^{\pm}} \mathbf{t}\,dA, \tag{106}$$

$$\mathsf{m}^{\pm} := \int_{\mathcal{S}^{\pm}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_o)\times\mathbf{t}\,dA, \tag{107}$$

la (101) diventa identica alla (33). In questo modo si è data una interpretazione dei descrittori delle distribuzioni di forza introdotti nella (33).

5.4 Descrittori della tensione

Si consideri ora la espressione della potenza interna

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = -\int_{\mathcal{R}} \mathbf{T}\cdot\mathbf{G}\,dV = -\int_{\bar{\mathcal{R}}} \lambda\mathbf{T}\cdot\mathbf{G}\,dV = -\int_0^L\int_{\mathcal{S}} \lambda\mathbf{T}\cdot\mathbf{G}\,dA\,d\zeta \tag{108}$$

con $\mathbf{G}$ dato dalle (29), (30),(31). Essendo, in corrispondenza di ciascuna sezione,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\cdot\mathbf{G} &= \mathbf{T}(\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3\otimes\mathbf{a}_3)\cdot\mathbf{G}\\ &= \mathbf{T}\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{G}\mathbf{a}_1+\mathbf{T}\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{G}\mathbf{a}_2+\mathbf{T}\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{G}\mathbf{a}_3,\end{aligned} \tag{109}$$

utilizzando le (30) e (31) si ottiene

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{G} = \mathbf{T}\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{G}\mathbf{a}_1+\mathbf{T}\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{W}\mathbf{a}_2+\mathbf{T}\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{W}\mathbf{a}_3. \tag{110}$$

Per il principio di obiettività materiale $\mathbf{T}$ deve essere tale che

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{W} = 0 \tag{111}$$

per qualsiasi $\mathbf{W}$ antisimmetrico. Espandendo come nella (109) si ha

$$0 = \mathbf{T}\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{W}\mathbf{a}_1+\mathbf{T}\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{W}\mathbf{a}_2+\mathbf{T}\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{W}\mathbf{a}_3. \tag{112}$$

Sottraendo tale espressione alla (110) risulta

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{W})\mathbf{a}_1. \tag{113}$$

Poichè dalla (86) è

$$\mathbf{G}\mathbf{x}' = \lambda\, \mathbf{G}\mathbf{a}_1 + \alpha_2\, \mathbf{G}\mathbf{a}_2 + \alpha_3\, \mathbf{G}\mathbf{a}_3, \tag{114}$$

$$\mathbf{W}\mathbf{x}' = \lambda\, \mathbf{W}\mathbf{a}_1 + \alpha_2\, \mathbf{W}\mathbf{a}_2 + \alpha_3\, \mathbf{W}\mathbf{a}_3, \tag{115}$$

risulta, per le (30) e (31),

$$(\mathbf{G} - \mathbf{W})\mathbf{x}' = \lambda\, (\mathbf{G} - \mathbf{W})\mathbf{a}_1. \tag{116}$$

Pertanto la (113) diventa, per la (29),

$$\begin{aligned}
\lambda\, \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} &= \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{W})\mathbf{x}' \qquad (117)\\
&= \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \cdot \big(\mathbf{w}'_o + \mathbf{W}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \mathbf{W}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_o) - \mathbf{W}\mathbf{x}'\big)\\
&= \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \cdot \big(\mathbf{w}'_o - \mathbf{W}\mathbf{x}'_o + \mathbf{W}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\big)\\
&= \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \cdot \big(\mathbf{w}'_o - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'_o + \boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\big)\\
&= \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{w}'_o - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'_o) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}'. \qquad (118)
\end{aligned}$$

Ponendo

$$\mathbf{s} := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \, dA, \tag{119}$$

$$\mathbf{m} := \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \, dA, \tag{120}$$

la espressione della potenza interna (108) diventa identica alla (52). Questo permette di interpretare $\mathbf{s}$ e $\mathbf{m}$ come descrittori della tensione $\mathbf{T}$ in corrispondenza di ciascuna sezione.

6 Piccole deformazioni nel modello tridimensionale

6.1 Atti di moto test

In genere per piccole deformazioni nella espressione della potenza compaiono solo i termini di ordine zero del campo di velocità, poiché sia la tensione che le forze sono di ordine uno rispetto al gradiente dello spostamento.

Occorre dunque condiderare atti di moto e loro gradienti in $\bar{\mathcal{R}}$. Questi, essendo $\bar{\mathcal{R}}$ un cilindro, con $\bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{x}}'_o = \bar{\mathbf{a}}_1$ ovunque, sono descritti dalle espressioni

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w}_o + \mathbf{W}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o), \tag{121}$$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{w}'_o + \mathbf{W}'(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o), \tag{122}$$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_2, \tag{123}$$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_3. \tag{124}$$

6.2 Distribuzioni di forza e classi di equipotenza

Si consideri la espressione della potenza esterna

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w}\, dV + \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}\, dA, \tag{125}$$

in cui, trattandosi di piccole deformazioni, $\mathbf{w}$ è dato dalla (121). Avendo assunto che $\bar{\mathcal{R}}$ sia un cilindro con asse $\bar{\mathbf{x}}_o$ si ha

$$\int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w}\, dV = \int_0^L \int_{\mathcal{S}} \mathbf{b}\, dA \cdot \mathbf{w}_o\, d\zeta + \int_0^L \int_{\mathcal{S}} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \otimes \mathbf{b}\, dA \cdot \mathbf{W}\, d\zeta. \tag{126}$$

Assumendo inoltre che $\mathbf{t}$ sia assegnato solo sulle facce d'estremità, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}\, dA = &\int_{\mathcal{S}^-} \mathbf{t}\, dA \cdot \mathbf{w}_o(0) + \int_{\mathcal{S}^-} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \otimes \mathbf{t}\, dA \cdot \mathbf{W}(0)\\ &+ \int_{\mathcal{S}^+} \mathbf{t}\, dA \cdot \mathbf{w}_o(L) + \int_{\mathcal{S}^+} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \otimes \mathbf{t}\, dA \cdot \mathbf{W}(L).\end{aligned} \tag{127}$$

Introducendo come descrittori di classi di equipotenza per le distribuzioni di forza di volume

$$\mathsf{b} := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{b}\, dA, \tag{128}$$

$$\mathsf{c} := \int_{\mathcal{S}} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \mathbf{b}\, dA, \tag{129}$$

e come descrittori di classi di equipotenza per le distribuzioni di forza superficiali, in corrispondenza delle estremità destra e sinistra,

$$\mathsf{s}^{\pm} := \int_{\mathcal{S}^{\pm}} \mathbf{t}\, dA, \tag{130}$$

$$\mathsf{m}^{\pm} := \int_{\mathcal{S}^{\pm}} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \mathbf{t}\, dA, \tag{131}$$

la (125) diventa identica alla (33).

6.3 Descrittori della tensione

Si consideri ora la espressione della potenza interna

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = -\int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{G}\, dV = -\int_0^L \int_{\mathcal{S}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{G}\, dA\, d\zeta \tag{132}$$

in cui, trattandosi di piccole deformazioni, il gradiente della velocità $\mathbf{G}$ è descritto dalle (122), (123) e (124). Essendo, in corrispondenza di ciascuna sezione,

$$\begin{aligned}\mathbf{T} \cdot \mathbf{G} &= \mathbf{T}(\bar{\mathbf{a}}_1 \otimes \bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2 \otimes \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_3 \otimes \bar{\mathbf{a}}_3) \cdot \mathbf{G}\\ &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_3,\end{aligned} \tag{133}$$

utilizzando le (123) e (124) si ottiene

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{G} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1\cdot\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_2\cdot\mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_3\cdot\mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_3. \tag{134}$$

Per il principio di obiettività materiale $\mathbf{T}$ deve essere tale che

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{W} = 0 \tag{135}$$

per qualsiasi $\mathbf{W}$ antisimmetrico. Espandendo tale espressione come nella (133), risulta

$$0 = \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1\cdot\mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_2\cdot\mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_3\cdot\mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_3. \tag{136}$$

Sottraendo questa dalla (134) si ha

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{G} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1\cdot(\mathbf{G}-\mathbf{W})\bar{\mathbf{a}}_1. \tag{137}$$

Sostituendo la (122) si ottiene infine

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\cdot\mathbf{G} &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1\cdot\big(\mathbf{w}_{\mathsf{o}}' + \mathbf{W}'(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}}) - \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_1\big)\\ &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1\cdot(\mathbf{w}_{\mathsf{o}}' - \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_1) + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1\cdot\mathbf{W}'(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}})\\ &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1\cdot(\mathbf{w}_{\mathsf{o}}' - \boldsymbol{\omega}\times\bar{\mathbf{a}}_1) + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1\cdot\boldsymbol{\omega}'\times(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}}).\end{aligned} \tag{138}$$

Introducendo, come descrittori della tensione,

$$\mathbf{s} := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1\,dA, \tag{139}$$

$$\mathbf{m} := \int_{\mathcal{S}} (\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}})\times\mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1\,dA, \tag{140}$$

la espressione della potenza interna (132) diventa identica alla (52).

6.4 Matrice del gradiente dell'atto di moto

Dalla (122) si ha per il gradiente dell'atto di moto $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{w}_{\mathsf{o}}' + \mathbf{W}'(\zeta_2\,\bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3\,\bar{\mathbf{a}}_3), \tag{141}$$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_2, \tag{142}$$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_3. \tag{143}$$

Indicando la matrice della velocità angolare $\mathbf{W}$ nella (121) con

$$[\mathbf{W}] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{pmatrix} \tag{144}$$

e ponendo

$$\mathbf{w}_{\mathsf{o}} = w_{\mathsf{o}1}\,\bar{\mathbf{a}}_1 + w_{\mathsf{o}2}\,\bar{\mathbf{a}}_2 + w_{\mathsf{o}3}\,\bar{\mathbf{a}}_3, \tag{145}$$

la matrice del gradiente dell'atto di moto nella base $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$ risulta

$$[\mathbf{G}] = \begin{pmatrix} w'_{\mathsf{o}1} & -\omega_3 & \omega_2 \\ w'_{\mathsf{o}2} & 0 & -\omega_1 \\ w'_{\mathsf{o}3} & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\zeta_2\,\omega'_3 + \zeta_3\,\omega'_2 & 0 & 0 \\ -\zeta_3\,\omega'_1 & 0 & 0 \\ +\zeta_2\,\omega'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{146}$$

la cui parte simmetrica è

$$\begin{aligned} [\operatorname{sym}\mathbf{G}] = & \begin{pmatrix} w'_{\mathsf{o}1} & \frac{1}{2}(w'_{\mathsf{o}2} - \omega_3) & \frac{1}{2}(w'_{\mathsf{o}3} + \omega_2) \\ \frac{1}{2}(w'_{\mathsf{o}2} - \omega_3) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(w'_{\mathsf{o}3} + \omega_2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} -\zeta_2\,\omega'_3 + \zeta_3\,\omega'_2 & -\frac{1}{2}\zeta_3\,\omega'_1 & \frac{1}{2}\zeta_2\,\omega'_1 \\ -\frac{1}{2}\zeta_3\,\omega'_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\zeta_2\,\omega'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{147}$$

La differenza $\mathbf{G} - \mathbf{W}$ che compare nella (137) ha matrice

$$[\mathbf{G} - \mathbf{W}] = \begin{pmatrix} w'_{\mathsf{o}1} & 0 & 0 \\ w'_{\mathsf{o}2} - \omega_3 & 0 & 0 \\ w'_{\mathsf{o}3} + \omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\zeta_2\,\omega'_3 + \zeta_3\,\omega'_2 & 0 & 0 \\ -\zeta_3\,\omega'_1 & 0 & 0 \\ +\zeta_2\,\omega'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{148}$$

La prima colonna di ciascuna delle due matrici contiene le componenti rispettivamente dei vettori $(\mathbf{w}'_{\mathsf{o}} - \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_1)$ e $\mathbf{W}'(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}})$ della espressione (138). Si noti come anche da tali matrici risulta

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T} \cdot \operatorname{sym}\mathbf{G} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{W})\bar{\mathbf{a}}_1. \tag{149}$$

6.5 Matrice del gradiente dello spostamento

La deformazione (1) diventa

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}}(\zeta_1)) + (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}(\zeta_1))\big(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}}(\zeta_1)\big), \tag{150}$$

mentre il campo di spostamento (5), assume l'espressione

$$\mathbf{u}((\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}}(\zeta_1)) + \boldsymbol{\Theta}(\zeta_1)\big(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}}(\zeta_1)\big). \tag{151}$$

La *rotazione infinitesima* $\boldsymbol{\Theta}(\zeta_1)$ è descritta dalla matrice

$$[\boldsymbol{\Theta}(\zeta_1)] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3(\zeta_1) & \theta_2(\zeta_1) \\ \theta_3(\zeta_1) & 0 & -\theta_1(\zeta_1) \\ -\theta_2(\zeta_1) & \theta_1(\zeta_1) & 0 \end{pmatrix}. \tag{152}$$

Dalla (150) si ha per il gradiente della deformazione $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{x}_o' + \boldsymbol{\Theta}'(\zeta_2\,\bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3\,\bar{\mathbf{a}}_3), \tag{153}$$
$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_2 = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta})\bar{\mathbf{a}}_2, \tag{154}$$
$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_3 = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta})\bar{\mathbf{a}}_3. \tag{155}$$

Dalla (151) per il gradiente dello spostamento si ha

$$\nabla\mathbf{u}\,\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{u}_o' + \boldsymbol{\Theta}'(\zeta_2\,\bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3\,\bar{\mathbf{a}}_3), \tag{156}$$
$$\nabla\mathbf{u}\,\bar{\mathbf{a}}_2 = \boldsymbol{\Theta}\bar{\mathbf{a}}_2, \tag{157}$$
$$\nabla\mathbf{u}\,\bar{\mathbf{a}}_3 = \boldsymbol{\Theta}\bar{\mathbf{a}}_3. \tag{158}$$

La matrice del gradiente dello spostamento risulta pertanto

$$[\nabla\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} u_{o1}' & -\theta_3 & \theta_2 \\ u_{o2}' & 0 & -\theta_1 \\ u_{o3}' & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\zeta_2\,\theta_3' + \zeta_3\,\theta_2' & 0 & 0 \\ -\zeta_3\,\theta_1' & 0 & 0 \\ +\zeta_2\,\theta_1' & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{159}$$

La matrice della dilatazione infinitesima risulta

$$\begin{aligned}[\mathbf{E}] = [\operatorname{sym}\nabla\mathbf{u}] &= \begin{pmatrix} u_{o1}' & \frac{1}{2}(u_{o2}' - \theta_3) & \frac{1}{2}(u_{o3}' + \theta_2) \\ \frac{1}{2}(u_{o2}' - \theta_3) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(u_{o3}' + \theta_2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\zeta_2\,\theta_3' + \zeta_3\,\theta_2' & -\frac{1}{2}\zeta_3\,\theta_1' & \frac{1}{2}\zeta_2\,\theta_1' \\ -\frac{1}{2}\zeta_3\,\theta_1' & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\zeta_2\,\theta_1' & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{160}$$

Osservando che dalla linearizzazione della (99) si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_o' &= (1+\varepsilon)\,\bar{\mathbf{a}}_1 + \gamma_2\bar{\mathbf{a}}_2 + \gamma_3\bar{\mathbf{a}}_3 + \boldsymbol{\Theta}\bar{\mathbf{a}}_1 \\ &= (1+\varepsilon)\,\bar{\mathbf{a}}_1 + (\gamma_2 + \theta_3)\bar{\mathbf{a}}_2 + (\gamma_3 - \theta_1)\bar{\mathbf{a}}_3, \end{aligned} \tag{161}$$

alla (97) corrisponde pertanto la seguente relazione tra le componenti nella base $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$

$$\begin{pmatrix} u_{o1}' \\ u_{o2}' \\ u_{o3}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_3 \\ -\theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}. \tag{162}$$

mentre per la matrice della linearizzazione di $\boldsymbol{\Gamma} := \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}'$ nella base $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$, risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & -\chi_1 \\ -\chi_2 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3' & \theta_2' \\ \theta_3' & 0 & -\theta_1' \\ -\theta_2' & \theta_1' & 0 \end{pmatrix}. \tag{163}$$

6.6 Risposta

Utilizzando la funzione di risposta per un materiale elastico isotropo

$$\mathbb{C}(\mathbf{E}) = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}, \tag{164}$$

si costruisce la espressione di

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{T}\cdot\mathbf{G}\,dA. \tag{165}$$

Dalla (146) e dalla (**??**), risulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}\cdot\mathbf{G} = \mathbb{C}(\mathbf{E})\cdot\mathbf{G} = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{E})\,\mathbf{I}\cdot\mathbf{G} + 2\mu\mathbf{E}\cdot\mathbf{G} = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{E})\,\mathrm{tr}(\mathbf{G}) + 2\mu\mathbf{E}\cdot\mathbf{G}&\\
= (\lambda+2\mu)(\varepsilon - \zeta_2\chi_3 + \zeta_3\chi_2)w'_{\mathsf{o}1}&\\
+ \mu(\gamma_2 - \zeta_3\chi_1)(w'_{\mathsf{o}2} - \omega_3)&\\
+ \mu(\gamma_3 + \zeta_2\chi_1)(w'_{\mathsf{o}3} + \omega_2)&\\
- (\lambda+2\mu)(\varepsilon - \zeta_2\chi_3 + \zeta_3\chi_2)\zeta_2\,\omega'_3&\\
+ (\lambda+2\mu)(\varepsilon - \zeta_2\chi_3 + \zeta_3\chi_2)\zeta_3\,\omega'_2&\\
+ \mu\big(-(\gamma_2 - \zeta_3\chi_1)\zeta_3 + (\gamma_3 + \zeta_2\chi_1)\zeta_2\big)\omega'_1.&
\end{aligned} \tag{166}$$

Nella espressione dell'integrale (165) svolgono un ruolo importante le definizioni seguenti. Il *centro* $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{C}}$ di una sezione è definito dalla espressione

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{C}} := \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}} + \frac{1}{A}\int_{\mathcal{S}} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}})\,dA, \tag{167}$$

essendo A l'area della sezione. Il *tensore di Eulero* della sezione è

$$\mathbf{J} := \int_{\mathcal{S}} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}})\otimes(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}})\,dA. \tag{168}$$

Utilizzando la parametrizzazione della sezione indotta dai vettori base $\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ si ha

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{C}} = \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}} + \frac{1}{A}\int_{\mathcal{S}} (\zeta_2\,\bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3\,\bar{\mathbf{a}}_3)\,dA, \tag{169}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \int_{\mathcal{S}} (\zeta_2\,\bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3\,\bar{\mathbf{a}}_3)\otimes(\zeta_2\,\bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3\,\bar{\mathbf{a}}_3)\,dA\\
&= \int_{\mathcal{S}} (\zeta_2^2\,\bar{\mathbf{a}}_2\otimes\bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_2\zeta_3(\bar{\mathbf{a}}_2\otimes\bar{\mathbf{a}}_3 + \bar{\mathbf{a}}_3\otimes\bar{\mathbf{a}}_2) + \zeta_3^2\,\bar{\mathbf{a}}_3\otimes\bar{\mathbf{a}}_3)\,dA.
\end{aligned} \tag{170}$$

La matrice del tensore di Eulero nella base $\{\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$ risulta

$$[J] = \int_{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} \zeta_2^2 & \zeta_3\zeta_2\\ \zeta_2\zeta_3 & \zeta_3^2 \end{pmatrix} dA. \tag{171}$$

Scegliendo $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{o}} = \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{C}}$, per la (169),

$$\int_{\mathcal{S}} (\zeta_2\, \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3\, \bar{\mathbf{a}}_3)\, dA = \mathbf{o} \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{S}} \zeta_2\, dA = 0, \quad \int_{\mathcal{S}} \zeta_3\, dA = 0. \tag{172}$$

Scegliendo $\bar{\mathbf{a}}_2$ e $\bar{\mathbf{a}}_3$ autovettori di $\mathbf{J}$,

$$\mathbf{J}\bar{\mathbf{a}}_2 = \int_{\mathcal{S}} \zeta_2^2\, dA\, \bar{\mathbf{a}}_2, \quad \mathbf{J}\bar{\mathbf{a}}_3 = \int_{\mathcal{S}} \zeta_3^2\, dA\, \bar{\mathbf{a}}_3, \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{S}} \zeta_2\zeta_3\, dA = 0. \tag{173}$$

Tenendo conto di queste proprietà e ponendo

$$J_2 := \int_{\mathcal{S}} \zeta_3^2\, dA, \tag{174}$$

$$J_3 := \int_{\mathcal{S}} \zeta_2^2\, dA, \tag{175}$$

$$J_o := \int_{\mathcal{S}} (\zeta_2^2 + \zeta_3^2)\, dA, \tag{176}$$

dalla (166) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{T}\cdot\mathbf{G}\, dA = (\lambda+2\mu)\big(A\varepsilon w'_{\mathsf{o}1} + J_2\chi_2\omega'_2 + J_3\chi_3\omega'_3\big) \\ +\mu\big(A\gamma_2(w'_{\mathsf{o}2} - \omega_3) + A\gamma_3(w'_{\mathsf{o}3} + \omega_2) + J_o\chi_1\omega'_1\big). \end{aligned} \tag{177}$$

I termini sulla diagonale della matrice del tensore di Eulero si dicono *momenti d'inerzia*. Gli autovalori si dicono momenti d'inerzia *principali*. In particolare J_2 si dice il momento d'inerzia (principale) rispetto alla direzione $\bar{\mathbf{a}}_2$, J_3 si dice il momento d'inerzia (principale) rispetto alla direzione $\bar{\mathbf{a}}_3$, mentre J_o si dice *momento d'inerzia polare*.

Si noti che, affinché la (57) sia uguale alla (132) per qualsiasi atto di moto, deve essere

$$\mathbf{s}\cdot(\mathbf{w}'_{\mathsf{o}} - \boldsymbol{\omega}\times\bar{\mathbf{a}}_1) + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega}' = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{T}\cdot\mathbf{G}\, dA \tag{178}$$

Utilizzando le componenti dei descrittori della tensione definite nelle (58) e (59) si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{s}\cdot(\mathbf{w}'_{\mathsf{o}} - \boldsymbol{\omega}\times\bar{\mathbf{a}}_1) + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega}' = N w'_{\mathsf{o}1} + Q_2(w'_{\mathsf{o}2} - \omega_3) + Q_3(w'_{\mathsf{o}3} + \omega_2) \\ + M_1\omega'_1 + M_2\omega'_2 + M_3\omega'_3. \end{aligned} \tag{179}$$

Sostituendo le (177) e (179) nella (178) si ottiene una equazione che deve valere per qualsiasi atto di moto. Risulta pertanto

$$N = (\lambda+2\mu)A\,\varepsilon, \tag{180}$$

$$Q_2 = \mu A\,\gamma_2, \tag{181}$$

$$Q_3 = \mu A\,\gamma_3, \tag{182}$$

$$M_1 = \mu J_o\,\chi_1, \tag{183}$$

$$M_2 = (\lambda+2\mu)J_2\,\chi_2, \tag{184}$$

$$M_3 = (\lambda+2\mu)J_3\,\chi_3. \tag{185}$$

Si osservi che $(\lambda + 2\mu)\varepsilon$ è la tensione normale corrispondente ad un allungamento ε nella direzione $\bar{\mathbf{a}}_1$ di un cubo con contrazione trasversale impedita. Nel caso di una trave, libera di contrarsi trasversalmente, è più realistico sostituire a $(\lambda+2\mu)$ il modulo di Young. Per questa ragione la funzione di risposta per una trave si assume descritta dalle seguenti espressioni

$$N = YA\,\varepsilon, \tag{186}$$
$$Q_2 = \mu A\,\gamma_2, \tag{187}$$
$$Q_3 = \mu A\,\gamma_3, \tag{188}$$
$$M_1 = \mu J_o\,\chi_1, \tag{189}$$
$$M_2 = YJ_2\,\chi_2, \tag{190}$$
$$M_3 = YJ_3\,\chi_3. \tag{191}$$

È possibile motivare altre correzioni alle espressioni precedenti, attraverso altri metodi di identificazione della risposta del modello di trave di Timoshenko. Inoltre, almeno in linea di principio, è possibile determinare direttamente i coefficienti delle espressioni precedenti attraverso prove sperimentali, senza derivarli dai moduli di Lamè λ e μ.

6.7 Distribuzioni di forza sulle sezioni corrispondenti alla tensione

Si noti che, immaginando di tagliare la trave in due in corrispondenza di una sezione, sulla faccia di normale esterna $\bar{\mathbf{a}}_1$ alla tensione $\mathbf{T}$ corrisponde una distribuzione di forza superficiale che per la (**??**) vale

$$\begin{aligned}\mathbf{t} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 &= \mathbb{C}(\mathbf{E})\bar{\mathbf{a}}_1 = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{E})\bar{\mathbf{a}}_1 + 2\mu\mathbf{E}\bar{\mathbf{a}}_1\\ &= (\lambda+2\mu)(\varepsilon - \zeta_2\chi_3 + \zeta_3\chi_2)\bar{\mathbf{a}}_1 + \mu(\gamma_2 - \zeta_3\chi_1)\bar{\mathbf{a}}_2 + \mu(\gamma_3 + \zeta_2\chi_1)\bar{\mathbf{a}}_3.\end{aligned} \tag{192}$$

Apparentemente sembra così possibile ricostruire, almeno parzialmente, la tensione $\mathbf{T}$ nel continuo di Cauchy a partire dai descrittori della tensione $\mathbf{s}$ e $\mathbf{m}$ della trave di Timoshenko, dopo aver calcolato ε, γ_2, γ_3, χ_1, χ_2, χ_3, attraverso le (186)-(191). È bene ricordare però che la tensione $\mathbf{T}$ in generale potrà soddisfare le equazioni di bilancio solo limitando gli atti di moto test a quelli descritti nel par. 6.1. Non è dunque in generale una soluzione delle equazioni di bilancio del continuo di Cauchy. Inoltre occorre osservare che le funzioni di risposta per la trave di Timoshenko derivano dalla funzione di risposta adottata per il continuo di Cauchy, assumendo per questo le deformazioni (150). Queste deformazioni sono solo un sottoinsieme delle deformazioni del continuo di Cauchy e dunque non comprendono in generale la soluzione per il continuo di Cauchy del particolare problema considerato.

Il modo corretto di vedere la relazione tra il modello di trave di Timoshenko e il continuo di Cauchy, nel caso di corpi tipo *trave*,[2] consiste nel considerare i due modelli come *modelli a scale diverse*, il primo più *sommario*, il secondo più *fine*.

Naturalmente ha interesse che i due modelli siano strettamente legati tra loro. Un modo per conciliare meglio la descrizione sommaria e quella fine, rispetto a quanto esposto nel

[2] Quei corpi la cui forma può essere generata facendo scorrere una figura piana lungo una curva, risultando lo spessore piccolo rispetto alla lunghezza.

paragrafo precendente, consiste in questo: per lo stesso insieme degli atti di moto test, che selezionano le classi di equipotenza, si considerano insiemi di deformazioni più ampi di quelli descritti dalla (150), ma soggetti ad esempio alle condizioni di bilancio al bordo nel modello fine, di cui fa parte il bordo delle sezioni. Si giunge così a determinare valori diversi dei coefficienti delle funzioni di risposta. Inoltre, cosa di solito più importante, essendo diverse le deformazioni, risulta diversa la espressione della dilatazione infinitesima $\mathbf{E}$ e quindi la (192). L'obiettivo è ottenere una valutazione accurata di $\mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1$ poiché su questa si basano le *verifiche di resistenza* del materiale.

Della espressione (192) è in genere considerata accurata la distribuzione normale uniforme corrispondente a ε, così come la distribuzione normale lineare corrispondente a χ_2 e a χ_3. La distribuzione tangenziale uniforme corrispondente a γ_2 nel continuo di Cauchy contrasta invece con la simmetria della tensione $\mathbf{T}$, essendo nulla la distribuzione superficiale sul bordo della sezione. Per questo viene sostituita, nel caso di sezioni rettangolari, da una distribuzione tangenziale quadratica, nulla sull bordo della sezione, di risultante Q_2. Lo stesso accade per il termine corrispondente a γ_3. Il termine corrispondente a χ_1 è accurato solo nel caso di sezione circolare.

6.8 Trave di Eulero-Bernoulli

Quando il rapporto tra spessore della sezione e lunghezza dell'asse è molto piccolo accade che γ_2 e γ_3 risultano molto piccoli, pur restando Q_2 e Q_3 determinate dalle equazioni di bilancio. Questo motiva una semplificazione del modello di trave di Timoshenko attraverso la introduzione dei *vincoli interni*

$$\gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0. \tag{193}$$

Corrispondentemente si modificano le espressioni (187) e (188) della funzione di risposta nelle seguenti

$$Q_2 = \mu A\,\gamma_2 + Q_2^r, \tag{194}$$

$$Q_3 = \mu A\,\gamma_3 + Q_3^r, \tag{195}$$

assumendo in generale che la tensione è determinata dalla deformazione a meno di una parte *reattiva* che ha potenza interna nulla in atti di moto compatibili con i vincoli. Dalla (179) la potenza corrispondente a Q_2^r e Q_3^r è

$$Q_2^r(w'_{o2} - \omega_3) + Q_3^r(w'_{o3} + \omega_2) \tag{196}$$

che risulta nulla per atti di moto compatibili con i vincoli interni (193)

$$u'_{o2} - \theta_3 = 0, \quad u'_{o3} + \theta_2 = 0, \tag{197}$$

qualunque siano Q_2^r e Q_3^r. Pertanto Q_2 e Q_3 hanno una parte reattiva che può avere qualunque valore, mentre è nulla la parte dipendente da γ_2 e γ_3, essendo questi nulli. Più in generale si può assumere che esista una parte reattiva anche per N, M_1, M_2, M_3.

7 Piccole deformazioni in uno spazio di dimensione due

7.1 Atti di moto test

Gli atti di moto (121) sono descritti, per la (2), dai campi vettoriali

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2)) = \mathbf{w}_{\mathsf{o}}(\zeta_1) - \zeta_2\, \omega(\zeta_1)\bar{\mathbf{a}}_1, \tag{198}$$

di componenti, nella base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$,

$$w_1(\zeta_1, \zeta_2) = w_{\mathsf{o}1}(\zeta_1) - \zeta_2\, \omega(\zeta_1), \tag{199}$$
$$w_2(\zeta_1, \zeta_2) = w_{\mathsf{o}2}(\zeta_1). \tag{200}$$

La matrice del gradiente dell'atto di moto è

$$[\mathbf{G}] = [\nabla \mathbf{w}] = \begin{pmatrix} w'_{\mathsf{o}1} - \zeta_2\, \omega' & -\omega \\ w'_{\mathsf{o}2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_{\mathsf{o}1} & -\omega \\ w'_{\mathsf{o}2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \zeta_2 \tag{201}$$

con parte simmetrica

$$\operatorname{sym}[\mathbf{G}] = \begin{pmatrix} w'_{\mathsf{o}1} & \frac{1}{2}(w'_{\mathsf{o}2} - \omega) \\ \frac{1}{2}(w'_{\mathsf{o}2} - \omega) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \zeta_2 \tag{202}$$

7.2 Distribuzioni di forza e classi di equipotenza

Assumendo che $\mathbf{t}$ sia assegnato solo sulle facce d'estremità, si ha

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w}\, dV + \int_{\mathcal{S}^-} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}\, dA + \int_{\mathcal{S}^+} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}\, dA \tag{203}$$

Sostituendo le (199) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w}\, dV &= \int_0^L \int_{\mathcal{S}} \big(b_1(w_{\mathsf{o}1} - \zeta_2\, \omega) + b_2\, w_{\mathsf{o}2}\big)\, dA\, d\zeta_1 \\ &= \int_0^L \left(\int_{\mathcal{S}} b_1\, dA\ \ w_{\mathsf{o}1} + \int_{\mathcal{S}} b_2\, dA\ \ w_{\mathsf{o}2} - \int_{\mathcal{S}} \zeta_2\, b_1\, dA\ \ \omega \right) d\zeta_1 \\ &= \int_0^L \big(q\, w_{\mathsf{o}1} + p\, w_{\mathsf{o}2} + c\, \omega\big)\, d\zeta_1, \end{aligned} \tag{204}$$

avendo introdotto, come descrittori di classi di equipotenza,

$$q := \int_{\mathcal{S}} b_1\, dA, \tag{205}$$
$$p := \int_{\mathcal{S}} b_2\, dA, \tag{206}$$
$$c := -\int_{\mathcal{S}} \zeta_2\, b_1\, dA. \tag{207}$$

In corrispondenza delle estremità si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}^-} \mathbf{t}\cdot\mathbf{w}\, dA &= \int_{\mathcal{S}^-} \big(t_1(w_{o1}(0) - \zeta_2\,\omega(0)) + t_2\, w_{o2}(0)\big)\, dA \\
&= \int_{\mathcal{S}^-} t_1\, dA\;\, w_{o1}(0) + \int_{\mathcal{S}^-} t_2\, dA\;\, w_{o2}(0) - \int_{\mathcal{S}^-} \zeta_2\, t_1\, dA\;\, \omega(0) \\
&= N^-\, w_{o1}(0) + Q^-\, w_{o2}(0) + M^-\,\omega(0),
\end{aligned} \tag{208}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}^+} \mathbf{t}\cdot\mathbf{w}\, dA &= \int_{\mathcal{S}^+} \big(t_1(w_{o1}(L) - \zeta_2\,\omega(L)) + t_2\, w_{o2}(L)\big)\, dA \\
&= \int_{\mathcal{S}^+} t_1\, dA\;\, w_{o1}(L) + \int_{\mathcal{S}^+} t_2\, dA\;\, w_{o2}(L) - \int_{\mathcal{S}^+} \zeta_2\, t_1\, dA\;\, \omega(L) \\
&= N^+\, w_{o1}(L) + Q^+\, w_{o2}(L) + M^+\,\omega(L),
\end{aligned} \tag{209}
$$

avendo introdotto, come descrittori di classi di equipotenza alle estremità destra e sinistra,

$$
N^\pm := \int_{\mathcal{S}^\pm} t_1\, dA, \tag{210}
$$

$$
Q^\pm := \int_{\mathcal{S}^\pm} t_2\, dA, \tag{211}
$$

$$
M^\pm := -\int_{\mathcal{S}^\pm} \zeta_2\, t_1\, dA. \tag{212}
$$

7.3 Descrittori della tensione

Dalla espressione del gradiente di un atto di moto (202) si ha, indicando con σ_{ij} gli elementi della matrice della tensione $\mathbf{T}$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = -\int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{w}\, dV &= -\int_0^L \Big(\int_{\mathcal{S}} \sigma_{11}\, dA\;\, w'_{o1} + \int_{\mathcal{S}} \sigma_{21}\, dA\;\, (w'_{o2} - \omega) \\
&\quad - \int_{\mathcal{S}} \zeta_2\, \sigma_{11}\, dA\;\, \omega' \Big)\, d\zeta_1 \\
&= -\int_0^L \Big(N\, w'_{o1} + Q\,(w'_{o2} - \omega) + M\,\omega' \Big)\, d\zeta_1
\end{aligned} \tag{213}
$$

avendo introdotto, come descrittori della tensione,

$$
N(\zeta_1) := \int_{\mathcal{S}} \sigma_{11}\, dA, \tag{214}
$$

$$
Q(\zeta_1) := \int_{\mathcal{S}} \sigma_{21}\, dA, \tag{215}
$$

$$
M(\zeta_1) := -\int_{\mathcal{S}} \zeta_2\, \sigma_{11}\, dA. \tag{216}
$$

Si noti che la (213) si può anche scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = &-\int_0^L \begin{pmatrix} N & Q \\ Q & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w'_{o1} & \frac{1}{2}(w'_{o2} - \omega) \\ \frac{1}{2}(w'_{o2} - \omega) & 0 \end{pmatrix} d\zeta_1 \\ &- \int_0^L \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\omega' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\zeta_1 \end{aligned} \tag{217}$$

Attraverso una integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = &\int_0^L \Big(N' \, w_{o1} + Q' \, w_{o2} + Q \, \omega + M' \, \omega \Big) \, d\zeta_1 \\ &- N(L) \, w_{o1}(L) - Q(L) \, w_{o2}(L) - M(L) \, \omega(L) \\ &+ N(0) \, w_{o1}(0) + Q(0) \, w_{o2}(0) + M(0) \, \omega(0). \end{aligned} \tag{218}$$

7.4 Equazioni lineari di bilancio scalari

Risulta pertanto

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = &\int_0^L \big(q \, w_{o1} + p \, w_{o2} + c \, \omega \big) \, d\zeta_1 \\ &+ \int_0^L \Big(N' \, w_{o1} + Q' \, w_{o2} + Q \, \omega + M' \, \omega \Big) \, d\zeta_1 \\ &+ N^- \, w_{o1}(0) + Q^- \, w_{o2}(0) + M^- \, \omega(0) \\ &+ N(0) \, w_{o1}(0) + Q(0) \, w_{o2}(0) + M(0) \, \omega(0) \\ &+ N^+ \, w_{o1}(L) + Q^+ \, w_{o2}(L) + M^+ \, \omega(L) \\ &- N(L) \, w_{o1}(L) - Q(L) \, w_{o2}(L) - M(L) \, \omega(L). \end{aligned} \tag{219}$$

Raccogliendo i termini si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = &\int_0^L \Big(N' + q \Big) \, w_{o1} \, d\zeta_1 \\ &+ \int_0^L \Big(Q' + p \Big) \, w_{o2} \, d\zeta_1 \\ &+ \int_0^L \Big(M' + Q + c \Big) \, \omega \, d\zeta_1 \\ &+ \Big(N^- + N(0) \Big) \, w_{o1}(0) + \Big(Q^- + Q(0) \Big) \, w_{o2}(0) + \Big(M^- + M(0) \Big) \, \omega(0) \\ &+ \Big(N^+ - N(L) \Big) \, w_{o1}(L) + \Big(Q^+ - Q(L) \Big) \, w_{o2}(L) + \Big(M^+ - M(L) \Big) \, \omega(L). \end{aligned} \tag{220}$$

La condizione che per qualsiasi atto di moto sia

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = 0 \tag{221}$$

risulta equivalente alle equazioni differenziali di bilancio

$$N' + q = 0, \tag{222}$$
$$Q' + p = 0, \tag{223}$$
$$M' + Q + c = 0, \tag{224}$$

assieme alle equazioni di bilancio al bordo

$$N^- + N(0) = 0, \tag{225}$$
$$Q^- + Q(0) = 0, \tag{226}$$
$$M^- + M(0) = 0, \tag{227}$$
$$N^+ - N(L) = 0, \tag{228}$$
$$Q^+ - Q(L) = 0, \tag{229}$$
$$M^+ - M(L) = 0. \tag{230}$$

7.5 Matrice del gradiente dello spostamento

In uno spazio di dimensione la (151) diventa, utilizzando la (8) e la (2),

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2)) = \mathbf{u}_\mathsf{o}(\zeta_1) + \mathbf{\Theta}(\zeta_1)\big(\zeta_2\, \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1)\big). \tag{231}$$

Indicando la matrice di $\mathbf{\Theta}(\zeta_1)$ con

$$[\mathbf{\Theta}(\zeta_1)] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta(\zeta_1) \\ \theta(\zeta_1) & 0 \end{pmatrix}, \tag{232}$$

si ha

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2)) = \mathbf{u}_\mathsf{o}(\zeta_1) - \zeta_2\, \theta(\zeta_1)\bar{\mathbf{a}}_1(\zeta_1). \tag{233}$$

Poiché $\bar{\mathcal{R}}$ è un cilindro, con $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ base ortonormale costante, la espressione del campo di spostamento in termini di componenti nella base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ risulta

$$u_1(\zeta_1, \zeta_2) = u_{\mathsf{o}1}(\zeta_1) - \zeta_2\, \theta(\zeta_1), \tag{234}$$
$$u_2(\zeta_1, \zeta_2) = u_{\mathsf{o}2}(\zeta_1). \tag{235}$$

La matrice del gradiente dello spostamento è

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{pmatrix} u'_{\mathsf{o}1} & -\theta \\ u'_{\mathsf{o}2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\theta' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \zeta_2 \tag{236}$$

con parte simmetrica

$$\operatorname{sym}[\nabla \mathbf{u}] = \begin{pmatrix} u'_{\mathsf{o}1} & \frac{1}{2}(u'_{\mathsf{o}2} - \theta) \\ \frac{1}{2}(u'_{\mathsf{o}2} - \theta) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\theta' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \zeta_2 \tag{237}$$