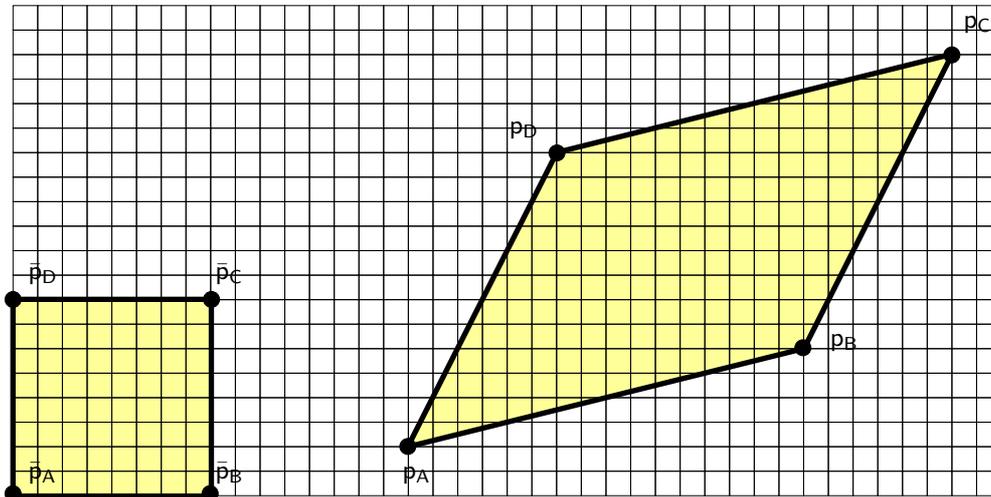


Deformazione affine



Si consideri la deformazione corrispondente alle due configurazioni di un corpo rappresentate nella figura. Assumendo che la deformazione sia affine:

- costruire la matrice del gradiente della deformazione;
- costruire la dilatazione e la rotazione corrispondenti;
- descrivere le direzioni principali della dilatazione e indicare le dilatazioni principali;
- calcolare l'ampiezza della rotazione;
- calcolare il rapporto tra le aree delle due forme del corpo.

Ai fini del calcolo si scelga un sistema di coordinate cartesiane, fissando un'origine e una base ortonormale.

Scelta una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ adattata al reticolo e un'origine del sistema di coordinate, le posizioni sono descritte dalle espressioni seguenti

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{p}}_A &= \mathbf{o} \\ \bar{\mathbf{p}}_B &= \bar{\mathbf{p}}_A + 8 \mathbf{e}_1 \\ \bar{\mathbf{p}}_D &= \bar{\mathbf{p}}_A + 8 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p}_A &= \mathbf{o} + 16 \mathbf{e}_1 + 2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p}_B &= \mathbf{p}_A + 16 \mathbf{e}_1 + 4 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p}_D &= \mathbf{p}_A + 6 \mathbf{e}_1 + 12 \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Poichè \mathbf{F} è tale che

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\bar{\mathbf{p}}_B - \bar{\mathbf{p}}_A) &= \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A \\ \mathbf{F}(\bar{\mathbf{p}}_D - \bar{\mathbf{p}}_A) &= \mathbf{p}_D - \mathbf{p}_A\end{aligned}$$

sostituendo le componenti dei vettori differenza si ottiene la seguente matrice di \mathbf{F}

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 2 & 0.75 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

La matrice del tensore di Cauchy-Green è, nella rappresentazione approssimata dei reali,

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T [\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 4.25 & 2.25 \\ 2.25 & 2.8125 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori sono

$$\eta_1 = 1.16924, \quad \eta_2 = 5.89326$$

Pertanto le dilatazioni principali sono

$$\lambda_1 = \sqrt{1.16924} = 1.08131, \quad \lambda_2 = \sqrt{5.89326} = 2.4276$$

Le matrici delle proiezioni sugli autospazi di \mathbf{C} sono rispettivamente

$$[\mathbf{P}_1] = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} [\mathbf{C} - \eta_2 \mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 0.347852 & -0.476289 \\ -0.476289 & 0.652148 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{P}_2] = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} [\mathbf{C} - \eta_1 \mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 0.652148 & 0.476289 \\ 0.476289 & 0.347852 \end{pmatrix}$$

La matrice della dilatazione risulta dunque

$$[\mathbf{U}] = [\lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 1.95929 & 0.641223 \\ 0.641223 & 1.54962 \end{pmatrix}$$

Infine per la matrice della rotazione \mathbf{R} tale che $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ si ha

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}] = [\mathbf{F}(\frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{P}_2)] = \begin{pmatrix} 0.997459 & 0.071247 \\ -0.071247 & 0.997459 \end{pmatrix}$$

La ampiezza della rotazione risulta $\theta = -0.0713075 = -0.0226979 \pi = -4.08562^\circ$.

Il rapporto tra le aree delle due forme del corpo è

$$\det \mathbf{F} = 2.625$$

Una descrizione della deformazione vista come successione della dilatazione \mathbf{U} e poi della rotazione \mathbf{R} , senza la traslazione che porta $\bar{\mathbf{p}}_A$ in \mathbf{p}_A , è data nella fig.1: la figura in rosso è trasformata da \mathbf{U} nella figura in verde e poi da \mathbf{R} nella figura in viola.

Una descrizione della stessa deformazione applicata ad un disco di centro $\bar{\mathbf{p}}_A$, senza la traslazione che porta $\bar{\mathbf{p}}_A$ in \mathbf{p}_A , è data nella fig.2: i semiassi dell'ellisse in verde corrispondono alle direzioni principali di \mathbf{U} . Questi sono poi ruotati da \mathbf{R} .

Una procedura equivalente consiste nel calcolare, invece che le matrici delle proiezioni \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 , direttamente gli autovettori di $[\mathbf{C}]$, normalizzarli e disporli come colonne nella matrice che definisce un cambiamento di base

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} -0.58979 & 0.807557 \\ 0.807557 & 0.58979 \end{pmatrix}$$

Essendo gli autovettori ortonormali la matrice $[\mathbf{A}]$ risulta ortogonale. Ne deriva che $[\mathbf{A}]^{-1} = [\mathbf{A}]^T$ e

$$[\mathbf{A}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

Essendo allora

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} [\mathbf{A}]^T$$

la matrice di \mathbf{U} si può calcolare utilizzando l'espressione

$$[\mathbf{U}] = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} [\mathbf{A}]^T$$

Per la matrice di \mathbf{R} si può utilizzare la espressione della inversa di $[\mathbf{U}]$

$$[\mathbf{U}]^{-1} = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} [\mathbf{A}]^T$$

ottenendo

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}] = [\mathbf{F}][\mathbf{U}]^{-1} = [\mathbf{F}][\mathbf{A}] \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} [\mathbf{A}]^T$$

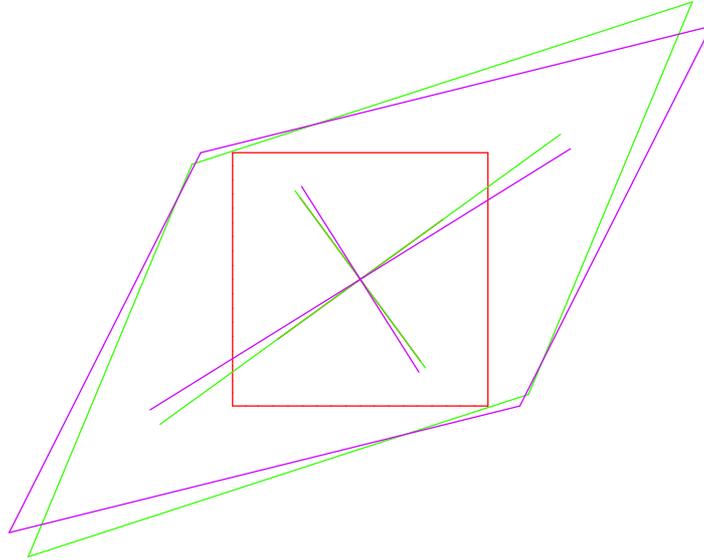


Figura 1: La dilatazione seguita dalla rotazione (rosso,verde,viola)

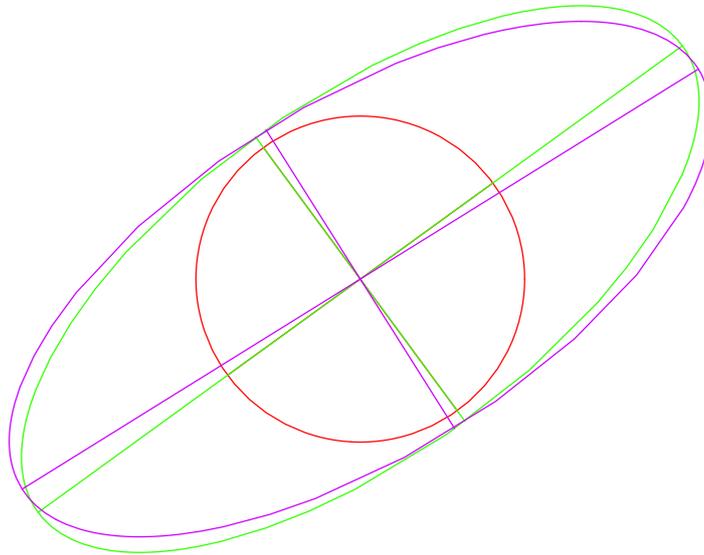


Figura 2: La dilatazione seguita dalla rotazione (rosso,verde,viola)