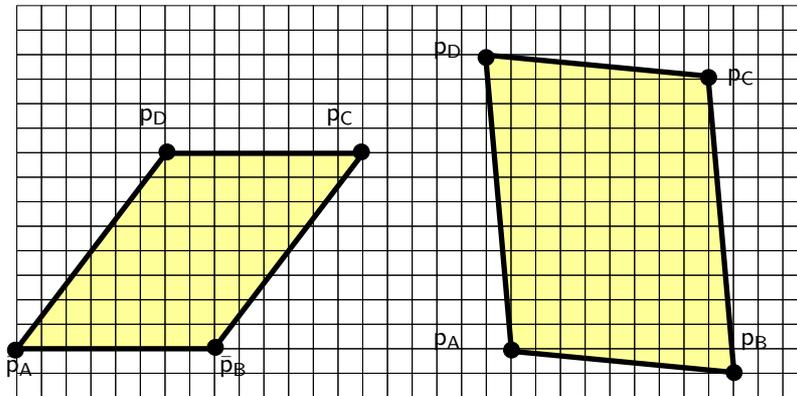


Deformazione affine



Si consideri la deformazione corrispondente alle due configurazioni di un corpo rappresentate nella figura. Assumendo che la deformazione sia affine:

- costruire la matrice del gradiente della deformazione;
- costruire la dilatazione e la rotazione corrispondenti;
- descrivere le direzioni principali della dilatazione e indicare le dilatazioni principali;
- calcolare l'ampiezza della rotazione;
- calcolare il rapporto tra le aree delle due forme del corpo.

Ai fini del calcolo si scelga un sistema di coordinate cartesiane, fissando un'origine e una base ortonormale.

Scelta una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ adattata al reticolo e un'origine del sistema di coordinate, le posizioni sono descritte dalle espressioni seguenti

$$\begin{aligned}\bar{p}_A &= \mathbf{o} + 20 \mathbf{e}_2 \\ \bar{p}_B &= \bar{p}_A + 80 \mathbf{e}_1 \\ \bar{p}_D &= \bar{p}_A + 60 \mathbf{e}_1 + 80 \mathbf{e}_2 \\ p_A &= \mathbf{o} + 200 \mathbf{e}_1 + 20 \mathbf{e}_2 \\ p_B &= p_A + 90 \mathbf{e}_1 - 10 \mathbf{e}_2 \\ p_D &= p_A - 10 \mathbf{e}_1 + 120 \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Poichè \mathbf{F} è tale che

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\bar{p}_B - \bar{p}_A) &= p_B - p_A \\ \mathbf{F}(\bar{p}_D - \bar{p}_A) &= p_D - p_A\end{aligned}$$

sostituendo le componenti dei vettori differenza si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(80\mathbf{e}_1) &= 90 \mathbf{e}_1 - 10 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{F}(60 \mathbf{e}_1 + 80 \mathbf{e}_2) &= -10 \mathbf{e}_1 + 120 \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Dalla prima si ha

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_1 = \frac{9}{8}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{8}\mathbf{e}_2$$

Dalla seconda

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_2 = -\frac{31}{32}\mathbf{e}_1 + \frac{51}{32}\mathbf{e}_2$$

Pertanto la matrice di \mathbf{F} risulta

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & -\frac{31}{32} \\ -\frac{1}{8} & \frac{51}{32} \end{pmatrix}$$

La matrice del tensore di Cauchy-Green è, nella rappresentazione approssimata dei reali,

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 1.28125 & -1.28906 \\ -1.28906 & 3.47852 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori sono

$$\eta_1 = 0.686166, \quad \eta_2 = 4.0736$$

Pertanto le dilatazioni principali sono

$$\lambda_1 = \sqrt{0.686166} = 0.828351, \quad \lambda_2 = \sqrt{4.0736} = 2.01832$$

Le matrici delle proiezioni sugli autospazi di \mathbf{C} sono rispettivamente

$$[\mathbf{P}_1] = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2}[\mathbf{C} - \eta_2\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 0.824326 & 0.380543 \\ 0.380543 & 0.175674 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{P}_2] = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1}[\mathbf{C} - \eta_1\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 0.175674 & -0.380543 \\ -0.380543 & 0.824326 \end{pmatrix}$$

La matrice della dilatazione risulta dunque

$$[\mathbf{U}] = [\lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 1.0374 & -0.452832 \\ -0.452832 & 1.80927 \end{pmatrix}$$

Infine per la matrice della rotazione \mathbf{R} tale che $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ si ha

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}] = [\mathbf{F}(\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{P}_2)] = \begin{pmatrix} 0.955064 & -0.296399 \\ 0.296399 & 0.955064 \end{pmatrix}$$

La ampiezza della rotazione risulta $\theta = 0.30092 = 0.0957859\pi = 17.2415^\circ$.

Il rapporto tra le aree delle due forme del corpo è

$$\det \mathbf{F} = 1.67188$$

Una procedura equivalente per il calcolo della dilatazione e della rotazione (si veda ESERCIZIO[2-1]) consiste nel calcolare esplicitamente gli autovettori di $[\mathbf{C}]$, invece che le matrici delle proiezioni \mathbf{P}_1

e \mathbf{P}_2 , normalizzarli e disporli come colonne della matrice che definisce un cambiamento di base. In questo caso tale matrice risulta

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 0.907924 & -0.419135 \\ 0.419135 & 0.907924 \end{pmatrix}$$

Una descrizione della deformazione vista come successione della dilatazione \mathbf{U} e poi della rotazione \mathbf{R} , senza la traslazione che porta $\bar{\mathbf{p}}_A$ in \mathbf{p}_A , è data nella fig.1: la figura in rosso è trasformata da \mathbf{U} nella figura in verde e poi da \mathbf{R} nella figura in viola.

Una descrizione alternativa della stessa deformazione applicata ad un disco di centro $\bar{\mathbf{p}}_A$, senza la traslazione che porta $\bar{\mathbf{p}}_A$ in \mathbf{p}_A , è data nella fig.2: i semiassi dell'ellisse in verde corrispondono alle direzioni principali di \mathbf{U} . Questi sono poi ruotati da \mathbf{R} .

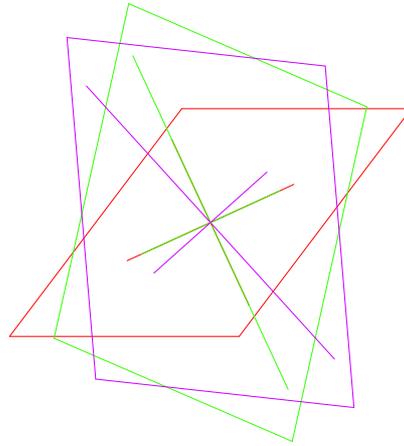


Figura 1: La dilatazione seguita dalla rotazione (rosso,verde,viola)

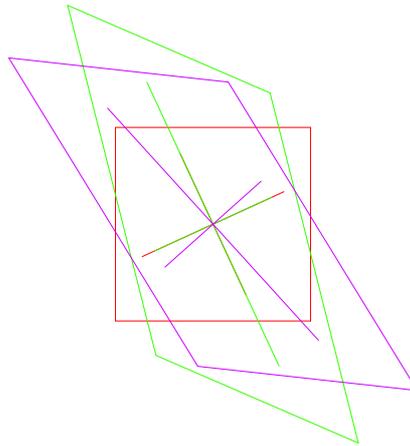


Figura 2: Le stesse deformazioni applicate ad un quadrato (rosso,verde,viola)

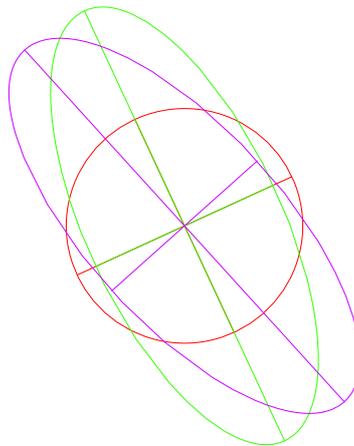


Figura 3: Le stesse deformazioni applicate ad un cerchio (rosso,verde,viola)