Deformazione non affine

Si consideri un corpo che abbia ad un certo istante la forma di un quadrato di lato 1. Indicando con $\bar{\mathsf{p}}_O$ il centro di tale quadrato e con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una coppia di vettori ortonormali e paralleli ai lati, si consideri la deformazione definita dall'espressione

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\kappa}(s_1, s_2)) = \mathsf{p}_O + \phi_1(s_1, s_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(s_1, s_2)\mathbf{e}_2$$

con

$$\boldsymbol{\kappa}(s_1, s_2) = \bar{\mathsf{p}}_O + s_1\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2$$

$$\phi_1(s_1, s_2) = \frac{26}{25}s_1 + \frac{1}{2}s_2 + \frac{3}{10}s_1 s_2$$

$$\phi_2(s_1, s_2) = \frac{49}{50}s_2 - \frac{3}{10}s_1 s_2$$

essendo p_O una posizione assegnata, eventualmente coincidente con $\bar{\mathsf{p}}_O$. Si disegni il contorno della forma del corpo originaria (quadrato) e di quella generata dalla deformazione. Per un generico punto del corpo si costruisca il gradiente della deformazione. Si calcolino poi in corrispondenza di alcuni punti del corpo le direzioni principali della dilatazione, le dilatazioni principali, l'ampiezza della rotazione. Si calcoli infine il rapporto tra le aree delle due forme del corpo.

Descrizione della deformazione

Il contorno della forma originaria è descritto dalle rette

$$\bar{\boldsymbol{c}}_1(h) = \bar{\mathsf{p}}_O + h\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$$
$$\bar{\boldsymbol{c}}_2(h) = \bar{\mathsf{p}}_O - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + h\mathbf{e}_2$$
$$\bar{\boldsymbol{c}}_3(h) = \bar{\mathsf{p}}_O + h\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$$
$$\bar{\boldsymbol{c}}_4(h) = \bar{\mathsf{p}}_O + \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + h\mathbf{e}_2$$

con $h \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Il contorno del corpo dopo la deformazione è descritto dalle curve corrispondenti seguenti

$$\boldsymbol{c}_1(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}_1(h)) = \mathsf{p}_O + \phi_1(h, -\frac{1}{2})\mathbf{e}_1 + \phi_2(h, -\frac{1}{2})\mathbf{e}_2$$
$$\boldsymbol{c}_2(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}_2(h)) = \mathsf{p}_O + \phi_1(-\frac{1}{2}, h)\mathbf{e}_1 + \phi_2(-\frac{1}{2}, h)\mathbf{e}_2$$
$$\boldsymbol{c}_3(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}_3(h)) = \mathsf{p}_O + \phi_1(h, \frac{1}{2})\mathbf{e}_1 + \phi_2(h, \frac{1}{2})\mathbf{e}_2$$
$$\boldsymbol{c}_4(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}_4(h)) = \mathsf{p}_O + \phi_1(\frac{1}{2}, h)\mathbf{e}_1 + \phi_2(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1, h)\mathbf{e}_2$$

La descrizione può essere arricchita aggiungendo una diagonale

$$\bar{\boldsymbol{c}}_5(h) = \bar{\mathsf{p}}_O + h(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$
$$\boldsymbol{c}_5(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}_5(h)) = \mathsf{p}_O + \phi_1(h, h)\mathbf{e}_1 + \phi_2(h, h)\mathbf{e}_2$$

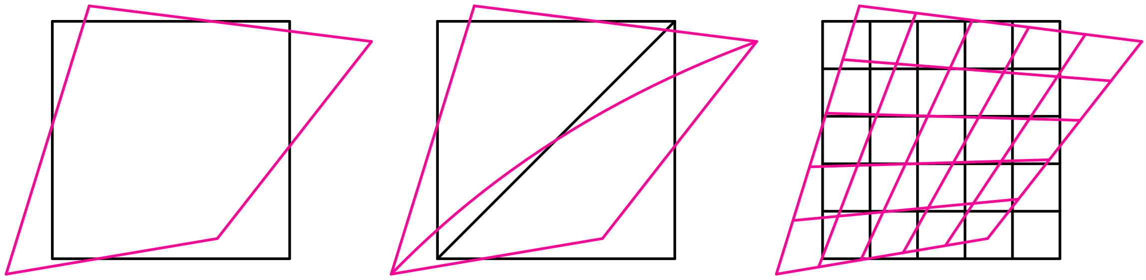

Figura 1: Tre diverse descrizioni della deformazione assegnata.

oppure delle linee verticali e orizzontali

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{c}}_v(h) &= \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + s_1\mathbf{e}_1 + h\mathbf{e}_2\\
\bar{\boldsymbol{c}}_o(h) &= \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + h\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2\\
\boldsymbol{c}_v(h) &= \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}_v(h)) = \mathsf{p}_{\mathsf{O}} + \phi_1(s_1,h)\mathbf{e}_1 + \phi_2(s_1,h)\mathbf{e}_2\\
\boldsymbol{c}_o(h) &= \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}_o(h)) = \mathsf{p}_{\mathsf{O}} + \phi_1(h,s_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(h,s_2)\mathbf{e}_2
\end{aligned}
$$

con $h \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e alcuni valori di s_1 e s_2.

Direzioni principali e rotazione

La matrice di $\mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}(s_1,s_2))$ è in generale

$$
[\mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}(s_1,s_2))] := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial s_1}(s_1,s_2) & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial s_2}(s_1,s_2) \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial s_1}(s_1,s_2) & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial s_2}(s_1,s_2) \end{pmatrix}.
$$

Sostituendo le espressioni di ϕ_1 e ϕ_2 si ottiene

$$
[\mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}(s_1,s_2))] = \begin{pmatrix} \dfrac{52+15s_2}{50} & \dfrac{5+3s_1}{10} \\ -\dfrac{3s_2}{10} & \dfrac{49-15s_1}{50} \end{pmatrix}
$$

La matrice del tensore di Cauchy-Green è

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{C}(\boldsymbol{\kappa}(s_1,s_2))] &= [\mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}(s_1,s_2))]^{\mathsf{T}}[\mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}(s_1,s_2))]\\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1352+780s_2+225s_2^2}{1250} & \dfrac{130-36s_2+3s_1(26+15s_2)}{250} \\ \dfrac{130-36s_2+3s_1(26+15s_2)}{250} & \dfrac{1513-360s_1+225s_1^2}{1250} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Centro:

$$\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} = \boldsymbol{\kappa}(0,0)$$

Sostituiti i valori di s_1 e s_2 dalla matrice di $\mathbf{C}$ si ottengono, calcolando le radici degli autovalori, le dilatazioni principali

$$\lambda_1 = 0.788687, \quad \lambda_2 = 1.29227$$

e le matrici delle proiezioni sugli autospazi

$$[\mathbf{P}_1] = \begin{pmatrix} 0.561454 & -0.496209 \\ -0.496209 & 0.438546 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 0.438546 & 0.496209 \\ 0.496209 & 0.561454 \end{pmatrix}$$

Dalla matrice della rotazione, calcolata utilizzando l'espressione $\mathbf{R} = \mathbf{F}(\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{P}_2)$, si ottiene infine l'ampiezza della rotazione

$$\theta = -0.0772372\pi.$$

Vertice a sinistra in basso:

$$\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} = \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\kappa}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$\lambda_1 = 0.73763, \quad \lambda_2 = 1.29225$$

$$[\mathbf{P}_1] = \begin{pmatrix} 0.759725 & -0.42725 \\ -0.42725 & 0.240275 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 0.240275 & 0.42725 \\ 0.42725 & 0.759725 \end{pmatrix}$$

$$\theta = -0.0314134\pi.$$

Vertice a destra in basso:

$$\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{B}} = \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\kappa}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$\lambda_1 = 0.494477, \quad \lambda_2 = 1.29672$$

$$[\mathbf{P}_1] = \begin{pmatrix} 0.603272 & -0.489219 \\ -0.489219 & 0.396728 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 0.396728 & 0.489219 \\ 0.489219 & 0.603272 \end{pmatrix}$$

$$\theta = -0.0900501\pi.$$

Vertice a destra in alto:

$$\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{C} = \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O} + \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\kappa}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\lambda_1 = 0.778266, \quad \lambda_2 = 1.39438$$

$$[\mathbf{P}_1] = \begin{pmatrix} 0.377783 & -0.484833 \\ -0.484833 & 0.622217 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 0.622217 & 0.484833 \\ 0.484833 & 0.377783 \end{pmatrix}$$

$$\theta = -0.120031\pi.$$

Vertice a sinistra in alto:

$$\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{D} = \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\kappa}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\lambda_1 = 1.08223, \quad \lambda_2 = 1.29104$$

$$[\mathbf{P}_1] = \begin{pmatrix} 0.460448 & -0.498433 \\ -0.498433 & 0.539552 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 0.539552 & 0.498433 \\ 0.484833 & 0.460448 \end{pmatrix}$$

$$\theta = -0.0675678\pi.$$

Rapporto tra le aree

Occorre integrare l'espressione del determinante del gradiente della deformazione sul dominio della parametrizzazione. Risulta

$$\frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \det \mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}(s_1, s_2)) ds_1 ds_2}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds_1 ds_2} = 1.0192$$