Appendice 2. Spazi euclidei

Indice

1 Spazi euclidei

Un insieme $\mathcal{E}$ si dice *spazio affine* modellato sullo spazio vettoriale reale $\mathcal{V}$ se esiste una funzione

$$\mathcal{E} \times \mathcal{V} \to \mathcal{E}, \tag{1}$$

che trasforma una coppia $\mathsf{p_A} \in \mathcal{E}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ in un elemento di $\mathcal{E}$, indicato con $\mathsf{p_A} + \mathbf{u}$, in modo tale che

1. $(\mathsf{p_A} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = \mathsf{p_A} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \quad \forall \mathsf{p_A} \in \mathcal{E},\ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V},\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$
2. $\mathsf{p_A} + \mathbf{o} = \mathsf{p_A}$, dove $\mathbf{o}$ è il vettore nullo di $\mathcal{V}$
3. per ogni coppia $\mathsf{p_A} \in \mathcal{E}, \mathsf{p_B} \in \mathcal{E}$ esiste un unico elemento di $\mathcal{V}$, indicato con $\mathsf{p_B} - \mathsf{p_A}$, tale che $\mathsf{p_A} + (\mathsf{p_B} - \mathsf{p_A}) = \mathsf{p_B}$.

Lo spazio $\mathcal{V}$ si dice *spazio delle traslazioni* di $\mathcal{E}$. Si dice inoltre che lo spazio affine $\mathcal{E}$ ha dimensione n con $n := \dim \mathcal{V}$. Si dice *spazio euclideo* uno spazio affine tale che in $\mathcal{V}$ sia definito un prodotto scalare. Si consideri la norma in $\mathcal{V}$ indotta dal prodotto scalare, cioè tale che $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$. Una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di $\mathcal{V}$ si dice *ortonormale* se $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Si definisce *distanza* la funzione $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ tale che $d(\mathsf{p_B}, \mathsf{p_A}) = \|\mathsf{p_B} - \mathsf{p_A}\|$.

Gli elementi di $\mathcal{E}$ si diranno *posizioni*.

Dagli assiomi dati derivano le seguenti espressioni utili nel calcolo. Sia

$$\mathsf{p_B} = \mathsf{p_A} + \mathbf{u}. \tag{2}$$

Il vettore $\mathsf{p_B} - \mathsf{p_A}$, per l'assioma 3, è l'unico vettore tale che

$$\mathsf{p_B} = \mathsf{p_A} + (\mathsf{p_B} - \mathsf{p_A}). \tag{3}$$

Risulta dunque

$$\mathsf{p_B} - \mathsf{p_A} = \mathbf{u}. \tag{4}$$

Un'altra utile relazione si ottiene nel modo seguente. Si osservi che per l'assioma 1 si ha

$$\mathsf{p_B} + (-\mathbf{u}) = \mathsf{p_A} + \mathbf{u} + (-\mathbf{u}), \tag{5}$$

da cui, per l'assioma 2, risulta

$$\mathsf{p_A} = \mathsf{p_B} - \mathbf{u} \tag{6}$$

Utilizzando la (4), si ottiene infine

$$\mathsf{p_A} - \mathsf{p_B} = -\mathbf{u} \tag{7}$$

e anche

$$\mathsf{p_A} - \mathsf{p_B} = -(\mathsf{p_B} - \mathsf{p_A}). \tag{8}$$

1.1 Vertici di un triangolo

Scelte tre posizioni $\mathsf{p_A}$, $\mathsf{p_B}$, $\mathsf{p_C}$, dall'assioma 3 si ha

$$\mathsf{p_B} = \mathsf{p_A} + (\mathsf{p_B} - \mathsf{p_A}) \tag{9}$$
$$\mathsf{p_C} = \mathsf{p_B} + (\mathsf{p_C} - \mathsf{p_B}). \tag{10}$$

Sostituendo nella seconda la prima, per l'assioma 1, risulta

$$\mathsf{p_C} = \mathsf{p_A} + (\mathsf{p_B} - \mathsf{p_A}) + (\mathsf{p_C} - \mathsf{p_B}). \tag{11}$$

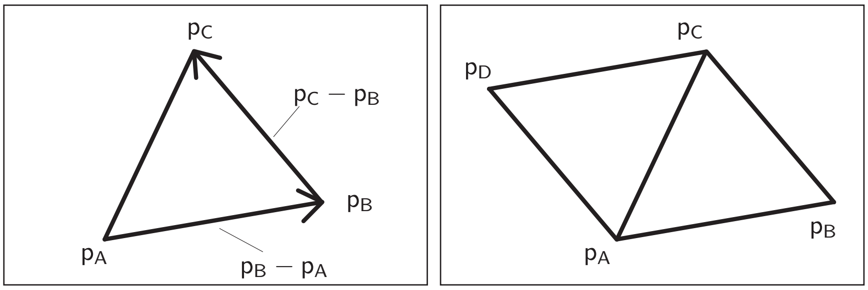

Figura 1: Triangolo e parallelogramma

Essendo anche

$$\mathsf{p}_\mathsf{C} = \mathsf{p}_\mathsf{A} + (\mathsf{p}_\mathsf{C} - \mathsf{p}_\mathsf{A}) \tag{12}$$

risulta

$$(\mathsf{p}_\mathsf{C} - \mathsf{p}_\mathsf{B}) + (\mathsf{p}_\mathsf{B} - \mathsf{p}_\mathsf{A}) = (\mathsf{p}_\mathsf{C} - \mathsf{p}_\mathsf{A}). \tag{13}$$

Questa relazione corrisponde alla costruzione della somma di due vettori attraverso il triangolo in Fig. 1.

1.2 Vertici di un parallelogramma

Aggiungendo ai vertici del triangolo p_A, p_B, p_C la posizione

$$\mathsf{p}_\mathsf{D} := \mathsf{p}_\mathsf{A} + (\mathsf{p}_\mathsf{C} - \mathsf{p}_\mathsf{B}). \tag{14}$$

si ottiene un quadrilatero. Essendo anche

$$\mathsf{p}_\mathsf{D} = \mathsf{p}_\mathsf{C} + (\mathsf{p}_\mathsf{D} - \mathsf{p}_\mathsf{C}) = \mathsf{p}_B + (\mathsf{p}_\mathsf{C} - \mathsf{p}_\mathsf{B}) + (\mathsf{p}_\mathsf{D} - \mathsf{p}_\mathsf{C}) = \mathsf{p}_A + (\mathsf{p}_B - \mathsf{p}_A) + (\mathsf{p}_\mathsf{C} - \mathsf{p}_\mathsf{B}) + (\mathsf{p}_\mathsf{D} - \mathsf{p}_\mathsf{C}) \tag{15}$$

deve essere

$$(\mathsf{p}_\mathsf{C} - \mathsf{p}_\mathsf{B}) = (\mathsf{p}_\mathsf{B} - \mathsf{p}_\mathsf{A}) + (\mathsf{p}_\mathsf{C} - \mathsf{p}_\mathsf{B}) + (\mathsf{p}_\mathsf{D} - \mathsf{p}_\mathsf{C}) \tag{16}$$

Risulta dunque

$$\mathsf{p}_\mathsf{D} - \mathsf{p}_\mathsf{C} = \mathsf{p}_\mathsf{A} - \mathsf{p}_\mathsf{B}. \tag{17}$$

Il quadrilatero pertanto è un parallelogramma, come in Fig. 1.

1.3 Sistemi di coordinate

Un sistema di coordinate *affine* in uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione n è costituito da una funzione biunivoca

$$\boldsymbol{\psi} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

indotta dalla scelta di una posizione *origine* $\boldsymbol{o} \in \mathcal{E}$ e di una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ nello spazio delle traslazioni $\mathcal{V}$, definita come la funzione che trasforma una posizione $\mathsf{p}_\mathsf{A} \in \mathcal{E}$ nella n-pla delle componenti del vettore $(\mathsf{p}_\mathsf{A} - \boldsymbol{o})$ nella base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Un sistema di coordinate affine si dice *cartesiano* se la base corrispondente è ortonormale.

1.4 Parametrizzazioni

Una posizione p_A può essere assegnata in termini di coordinate attraverso l'espressione

$$\mathsf{p}_\mathsf{A} = \boldsymbol{o} + (x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{e}_n) \tag{19}$$

essendo $\boldsymbol{\psi}(\mathsf{p}_\mathsf{A}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. In questo modo risulta definita la *parametrizzazione*

$$\boldsymbol{\kappa} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{E} \tag{20}$$

inversa della funzione coordinata (18). Una parametrizzazione in generale è una funzione iniettiva che può essere definita indipendentemente dal sistema di coordinate. Se il dominio della parametrizzazione è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ la sua immagine risulterà essere un sottoinsieme di $\mathcal{E}$.

2 Rette e piani

Una *retta* per p_A è una funzione $\boldsymbol{c} : \mathbb{R} \to \mathcal{E}$ del tipo

$$\boldsymbol{c}(s) = \mathsf{p}_\mathsf{A} + s\,\mathbf{u}, \tag{21}$$

essendo $\mathbf{u}$ un vettore. Date due rette

$$\boldsymbol{c}_1(s) = \mathsf{p}_\mathsf{A} + s\,\mathbf{u}_1, \tag{22}$$
$$\boldsymbol{c}_2(s) = \mathsf{p}_\mathsf{A} + s\,\mathbf{u}_2, \tag{23}$$

si dice *angolo* tra di esse il numero reale α tale che

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{u}_2\|}. \tag{24}$$

Le due rette si dicono *ortogonali* se $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$. Due rette

$$\boldsymbol{c}_1(s) = \mathsf{p}_\mathsf{A} + s\,\mathbf{u}_1, \tag{25}$$
$$\boldsymbol{c}_2(s) = \mathsf{p}_\mathsf{B} + s\,\mathbf{u}_2, \tag{26}$$

si dicono *parallele* se $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono vettori che generano lo stesso sottospazio di dimensione uno.

Un *piano* per p_A è una funzione $\boldsymbol{\pi} : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{E}$ del tipo

$$\boldsymbol{\pi}(s_1, s_2) = \mathsf{p}_\mathsf{A} + s_1\,\mathbf{u}_1 + s_2\,\mathbf{u}_2, \tag{27}$$

essendo $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ due vettori linearmente indipendenti.

Anche per le immagini di tali funzioni si usano i termini *retta* e *piano*, rispettivamente.

3 Isometrie

Sia $\mathcal{E}$ uno spazio euclideo e $\mathcal{V}$ lo spazio delle traslazioni. Una funzione biunivoca

$$\boldsymbol{\phi} : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \tag{28}$$

si dice *trasformazione di* $\mathcal{E}$. Una trasformazione di $\mathcal{E}$ che mantiene invariate le distanze tra qualsiasi coppia di posizioni si dice *isometria*. Che le distanze restino invariate implica non solo che la norma dei vettori differenza tra le posizioni resti invariata ma anche che il prodotto scalare tra qualsiasi coppia di vettori resti invariato. Infatti, scelta una posizione $\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}$ e una coppia di vettori $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{v}}$, ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &:= \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + \bar{\mathbf{u}}) - \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}), \\ \mathbf{v} &:= \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + \bar{\mathbf{v}}) - \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}), \end{aligned} \tag{29}$$

poichè

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \\ \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}}\|^2 &= (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}}) \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} - 2\,\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \end{aligned} \tag{30}$$

restando invariate le norme, si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}}. \tag{31}$$

Pertanto in una isometria restano invariati gli angoli tra coppie di vettori differenza. In particolare vettori ortogonali restano ortogonali.

Si noti che, attraverso le (29), l'isometria ϕ induce un'applicazione $\mathbf{Q}_{\mathsf{O}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ che trasforma i vettori nel modo seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{Q}_{\mathsf{O}}(\bar{\mathbf{u}}), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{Q}_{\mathsf{O}}(\bar{\mathbf{v}}). \end{aligned} \tag{32}$$

Pertanto la (29) si può anche riscrivere

$$\begin{aligned} \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + \bar{\mathbf{u}}) &= \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) + \mathbf{u} = \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) + \mathbf{Q}_{\mathsf{O}}(\bar{\mathbf{u}}), \\ \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + \bar{\mathbf{v}}) &= \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) + \mathbf{v} = \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) + \mathbf{Q}_{\mathsf{O}}(\bar{\mathbf{v}}), \end{aligned} \tag{33}$$

Si consideri ora un terzo vettore

$$\bar{\mathbf{w}} := a\,\bar{\mathbf{u}} + b\,\bar{\mathbf{v}} \tag{34}$$

e si ponga

$$\mathbf{w} := \mathbf{Q}_{\mathsf{O}}(\bar{\mathbf{w}}) = \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + \bar{\mathbf{w}}) - \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}). \tag{35}$$

Poichè

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = (a\,\bar{\mathbf{u}} + b\,\bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{\mathbf{u}} = a\,\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + b\,\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + b\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}, \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = (a\,\bar{\mathbf{u}} + b\,\bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} = a\,\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + b\,\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + b\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \tag{36}$$

il vettore $\mathbf{w}$ si può esprimere come

$$\mathbf{w} = a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v} + \mathbf{r}, \tag{37}$$

dove $\mathbf{r}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$. Affinchè sia

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{w}}, \tag{38}$$

$\mathbf{r}$ deve soddisfare la condizione

$$(a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v} + \mathbf{r}) \cdot (a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v} + \mathbf{r}) = (a\,\bar{\mathbf{u}} + b\,\bar{\mathbf{v}}) \cdot (a\,\bar{\mathbf{u}} + b\,\bar{\mathbf{v}}) \tag{39}$$

che, semplificandosi in

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 0, \tag{40}$$

implica $\mathbf{r} = \mathbf{o}$. Risulta dunque

$$\mathbf{w} = a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}. \tag{41}$$

Pertanto, in corrispondenza della posizione $\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}$ l'isometria ϕ, attraverso le (29) e (35), induce un'applicazione $\mathbf{Q}_{\mathsf{O}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tale che, per le (34) e (41),

$$\mathbf{Q}_{\mathsf{O}}(a\,\bar{\mathbf{u}} + b\,\bar{\mathbf{v}}) = a\,\mathbf{Q}_{\mathsf{O}}(\bar{\mathbf{u}}) + b\,\mathbf{Q}_{\mathsf{O}}(\bar{\mathbf{v}}). \tag{42}$$

Si tratta dunque di un'applicazione lineare. Questo tensore non dipende dalla posizione $\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}$. Infatti se si considera una nuova posizione

$$\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{C} = \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O} + \bar{\mathbf{d}} \tag{43}$$

si ottiene, per ogni vettore $\bar{\mathbf{w}}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_\mathsf{C}(\bar{\mathbf{w}}) &= \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{C} + \bar{\mathbf{w}}) - \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{C})\\ &= \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O} + \bar{\mathbf{d}} + \bar{\mathbf{w}}) - \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O} + \bar{\mathbf{d}})\\ &= \big(\phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) + \mathbf{Q}_\mathsf{O}(\bar{\mathbf{d}} + \bar{\mathbf{w}})\big) - \big(\phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) + \mathbf{Q}_\mathsf{O}(\bar{\mathbf{d}})\big)\\ &= \mathbf{Q}_\mathsf{O}(\bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{d}}) - \mathbf{Q}_\mathsf{O}(\bar{\mathbf{d}})\\ &= \mathbf{Q}_\mathsf{O}(\bar{\mathbf{w}}) + \mathbf{Q}_\mathsf{O}(\bar{\mathbf{d}}) - \mathbf{Q}_\mathsf{O}(\bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{Q}_\mathsf{O}(\bar{\mathbf{w}}).\end{aligned} \tag{44}$$

Pertanto una isometria ϕ induce un unico tensore $\mathbf{Q}$. Il tensore $\mathbf{Q}$ eredita dall'isometria ϕ la proprietà di mantenere invariato il prodotto scalare tra qualsiasi coppia di vettori. Ne deriva che $\mathbf{Q}$ è *ortogonale*. Infatti

$$\begin{aligned}&\mathbf{Q}\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{Q}\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad \forall\bar{\mathbf{u}},\ \forall\bar{\mathbf{v}}\\ \Rightarrow\quad &\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad \forall\bar{\mathbf{u}},\ \forall\bar{\mathbf{v}}\\ \Rightarrow\quad &(\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} - \mathbf{I})\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad \forall\bar{\mathbf{u}},\ \forall\bar{\mathbf{v}}\\ \Rightarrow\quad &\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}.\end{aligned} \tag{45}$$

In conclusione, dalle (29) e (32), si ottiene la seguente rappresentazione di una isometria

$$\phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} + \bar{\mathbf{v}}) = \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{v}}) \qquad \forall\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} \in \mathcal{E}, \quad \forall\bar{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}, \tag{46}$$

essendo $\mathbf{Q}$ un tensore *ortogonale*. Ponendo $\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B} = \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} + \bar{\mathbf{v}}$, la rappresentazione precedente assume la seguente forma

$$\phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B}) = \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + \mathbf{Q}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) \qquad \forall\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A},\ \forall\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B}. \tag{47}$$

4 Area

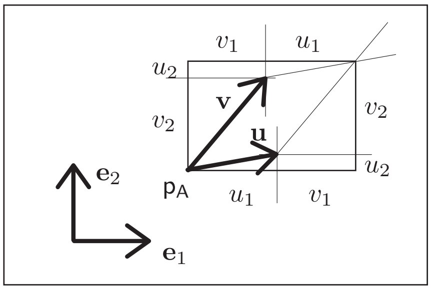

Figura 2: Area di un parallelogramma

In uno spazio euclideo[1] di dimensione 2 si consideri una posizione p_A e il parallelogramma corrispondente ad una coppia di vettori $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, di vertici

$$\mathsf{p}_\mathsf{A},\ \mathsf{p}_\mathsf{A} + \mathbf{u},\ \mathsf{p}_\mathsf{A} + \mathbf{v},\ \mathsf{p}_\mathsf{A} + \mathbf{u} + \mathbf{v}. \tag{48}$$

[1] Si noti che nelle definizioni che seguono di area, volume e determinante si utilizza solo la struttura di spazio affine. Tali definizioni sono pertanto indipendenti dal prodotto scalare e dunque dalla nozione di ortogonalità.

Si dice *area* una funzione

$$\text{area} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}, \tag{49}$$

tale che

1. $\text{area}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\,\text{area}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$,
2. $\text{area}(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \text{area}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \text{area}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$,
3. $\text{area}(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha\, \text{area}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$,

e che non valga zero per qualsiasi coppia di vettori. Si può dimostrare che da queste proprietà deriva che l'area è nulla se e solo se i vettori $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ sono linearmente dipendenti.

Esprimendo i vettori come combinazione lineare dei vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ si ha

$$\begin{aligned}
\text{area}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \text{area}(u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{v}) = u_1\, \text{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) + u_2\, \text{area}(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) \\
&= u_1\, \text{area}(\mathbf{e}_1, v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2) + u_2\, \text{area}(\mathbf{e}_2, v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2) \\
&= u_1 v_1\, \text{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + u_1 v_2\, \text{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + u_2 v_1\, \text{area}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + u_2 v_2\, \text{area}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \\
&= (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, \text{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).
\end{aligned} \tag{50}$$

L'area del parallelogramma risulta pertanto uguale al determinante della matrice che ha per colonne le coppie delle componenti dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, moltiplicato per l'area del parallelogramma corrispondente ai vettori della base. Se la base è ortonormale si assume di solito

$$\text{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1. \tag{51}$$

L'espressione trovata per l'area coincide con quella che si può calcolare seguendo la Fig. 2, utilizzando la definizione di area di un rettangolo e di area di un triangolo, attraverso l'espressione

$$(u_1 + v_1)(u_2 + v_2) - 2\Big(\frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{2} + v_1 u_2\Big) = u_1 v_2 - v_1 u_2. \tag{52}$$

5 Volume

In uno spazio euclideo di dimensione 3 si consideri una posizione p_A e il parallelepipedo corrispondente ad una terna di vettori $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, di vertici

$$\begin{aligned}
&\mathsf{p}_\mathsf{A}, \\
&\mathsf{p}_\mathsf{A} + \mathbf{u},\ \mathsf{p}_\mathsf{A} + \mathbf{v},\ \mathsf{p}_\mathsf{A} + \mathbf{w}, \\
&\mathsf{p}_\mathsf{A} + \mathbf{u} + \mathbf{v},\ \mathsf{p}_\mathsf{A} + \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \mathsf{p}_\mathsf{A} + \mathbf{w} + \mathbf{u}, \\
&\mathsf{p}_\mathsf{A} + \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}.
\end{aligned} \tag{53}$$

Si dice *volume* una funzione

$$\text{vol} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}, \tag{54}$$

tale che

1. $\text{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\,\text{vol}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\,\text{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$,
2. $\text{vol}(\mathbf{u} + \mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \text{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \text{vol}(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$,
3. $\text{vol}(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha\, \text{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$,

e che non valga zero per qualsiasi terna di vettori.

Esprimendo i vettori come combinazione lineare dei vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^{3} u_i \operatorname{vol}(\mathbf{e}_i, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_i v_j \operatorname{vol}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{w}) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} u_i v_j w_k \operatorname{vol}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) \\
&= (u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 - u_3 v_2 w_1) \operatorname{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \qquad (55)
\end{aligned}$$

Il volume del parallelepipedo risulta pertanto uguale al determinante della matrice che ha per colonne le terne delle componenti dei vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, moltiplicato per il volume del parallelepipedo corrispondente ai vettori della base. Per questo si può assegnare la funzione volume semplicemente assegnando il volume del parallelepipedo corrispondente ai vettori della base. Ad esempio si può assumere

$$\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1. \qquad (56)$$

Si consideri una funzione vol non nulla. Il volume corrispondente alla terna $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è nullo se e solo se i vettori sono linearmente dipendenti. Infatti se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ sono dipendenti allora un vettore si può esprimere come combinazione lineare degli altri e per la propietà di antisimmetria (1.) il volume risulta nullo. Viceversa, se $\operatorname{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ allora i tre vettori sono linearmente dipendenti, altrimenti costruendo con essi una base si otterrebbe un volume nullo in corrispondenza di qualsiasi terna di vettori, risultando così nulla la funzione vol, contrariamente a quanto assunto.

6 Determinante

Nel caso di spazio euclideo di dimensione 2, ponendo per un tensore $\mathbf{F}$ di $\mathcal{V}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\mathbf{e}_1 &= f_{11}\,\mathbf{e}_1 + f_{21}\,\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{F}\mathbf{e}_2 &= f_{12}\,\mathbf{e}_1 + f_{22}\,\mathbf{e}_2
\end{aligned} \qquad (57)$$

si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{area}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2) &= \operatorname{area}(f_{11}\mathbf{e}_1 + f_{21}\mathbf{e}_2, f_{12}\mathbf{e}_1 + f_{22}\mathbf{e}_2) \\
&= (f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}) \operatorname{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2). \qquad (58)
\end{aligned}$$

Si definisce *determinante* di $\mathbf{F}$ il rapporto

$$\det \mathbf{F} = \frac{\operatorname{area}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2)}{\operatorname{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \qquad (59)$$

Si dimostra che tale rapporto non dipende dalla scelta della coppia di vettori e neppure dalla scelta della funzione area.

La definizione data si estende al caso di spazio euclideo di dimensione 3. Per un tensore $\mathbf{F}$ di $\mathcal{V}$ si definisce *determinante* di $\mathbf{F}$ il rapporto

$$\det \mathbf{F} = \frac{\operatorname{vol}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3)}{\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} \qquad (60)$$

Si noti che ponendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\mathbf{e}_1 &= f_{11}\,\mathbf{e}_1 + f_{21}\,\mathbf{e}_2 + f_{31}\,\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{F}\mathbf{e}_2 &= f_{12}\,\mathbf{e}_1 + f_{22}\,\mathbf{e}_2 + f_{32}\,\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{F}\mathbf{e}_3 &= f_{13}\,\mathbf{e}_1 + f_{23}\,\mathbf{e}_2 + f_{33}\,\mathbf{e}_3
\end{aligned} \qquad (61)$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{vol}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) \\
&= \mathrm{vol}(f_{11}\,\mathbf{e}_1 + f_{21}\,\mathbf{e}_2 + f_{31}\,\mathbf{e}_3, f_{12}\,\mathbf{e}_1 + f_{22}\,\mathbf{e}_2 + f_{32}\,\mathbf{e}_3, f_{13}\,\mathbf{e}_1 + f_{23}\,\mathbf{e}_2 + f_{33}\,\mathbf{e}_3) \\
&= (f_{11}f_{22}f_{33} + f_{21}f_{32}f_{13} + f_{31}f_{12}f_{23} - f_{11}f_{32}f_{23} - f_{21}f_{12}f_{33} - f_{31}f_{22}f_{13})\,\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).
\end{aligned} \tag{62}
$$

7 Traccia

Dato un tensore $\mathbf{A}$ di $\mathcal{V}$ si definisce *traccia* di $\mathbf{A}$ il rapporto

$$
\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \frac{\mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3)}{\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} \tag{63}
$$

Si noti che ponendo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= a_{11}\,\mathbf{e}_1 + a_{21}\,\mathbf{e}_2 + a_{31}\,\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= a_{12}\,\mathbf{e}_1 + a_{22}\,\mathbf{e}_2 + a_{32}\,\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{A}\mathbf{e}_3 &= a_{13}\,\mathbf{e}_1 + a_{23}\,\mathbf{e}_2 + a_{33}\,\mathbf{e}_3
\end{aligned} \tag{64}
$$

si ottiene

$$
\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \frac{\mathrm{vol}(a_{11}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, a_{22}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, a_{33}\mathbf{e}_3)}{\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = a_{11} + a_{22} + a_{33}. \tag{65}
$$

8 Invarianti principali

Si consideri la funzione ι_2 tale che

$$
\iota_2(\mathbf{A}) = \frac{\mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3)}{\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} \tag{66}
$$

Espandendo ciascuno dei termini del denominatore si ottiene, utilizzando la definizione (63),

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) &= \mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_3) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3) && (67) \\
\mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3) &= \mathrm{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathrm{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{A}^2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) && (68) \\
\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3) &= \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{a}_3) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3) - \mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}^2\mathbf{e}_3) && (69)
\end{aligned}
$$

avendo posto temporaneamente $\mathbf{a}_i := \mathbf{A}\mathbf{e}_i$. Sommando e dividendo per $\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ si ottiene

$$
\iota_2(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}) - \iota_2(\mathbf{A}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) \tag{70}
$$

da cui risulta

$$
\iota_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\big(\,\mathrm{tr}(\mathbf{A})^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)\big). \tag{71}
$$

Si dicono *invarianti principali* di un tensore $\mathbf{A}$ di $\mathcal{V}$ i coefficienti del polinomio caratteristico. Espandendo l'espressione del polinomio caratteristico

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \frac{\operatorname{vol}\big((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{e}_1, (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{e}_2, (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{e}_3\big)}{\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)} \tag{72}$$

si ottiene

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + \iota_1(\mathbf{A})\,\lambda^2 - \iota_2(\mathbf{A})\,\lambda + \iota_3(\mathbf{A}) \tag{73}$$

con $\iota_1(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$ e $\iota_3(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$. Se lo spazio $\mathcal{V}$ ha dimensione 2 si ottiene invece

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \det(\mathbf{A}). \tag{74}$$

9 Orientamento

Definita un'area in uno spazio euclideo di dimensione 2, si dicono *orientate positivamente* le coppie ordinate di vettori a cui corrisponde un parallelogramma di area positiva, *orientate negativamente* quelle a cui corrisponde un parallelogramma di area negativa.

Definito un volume in uno spazio euclideo di dimensione 3, si dicono *orientate positivamente* le terne di vettori a cui corrisponde un parallelepipedo di volume positivo, *orientate negativamente* quelle a cui corrisponde un parallelepipedo di volume negativo.

Per via della (59) e della (60), un tensore $\mathbf{F}: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *conserva l'orientamento* se e solo se

$$\det \mathbf{F} > 0. \tag{75}$$

10 Prodotto vettoriale

In uno spazio euclideo di dimensione 3, in cui sia stato definito il volume in modo che in corrispondenza di una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ sia

$$\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) = 1, \tag{76}$$

si definisce *prodotto vettoriale* tra i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ il vettore

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} \tag{77}$$

tale che

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \operatorname{vol}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}), \qquad \forall \mathbf{w}\in\mathcal{V}. \tag{78}$$

Si noti che, per le proprietà del volume, $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}$. Inoltre $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{o}$ se e solo se i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti. Dalla (55) risulta

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1 = u_2v_3 - u_3v_2, \tag{79}$$
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2 = u_3v_1 - u_1v_3, \tag{80}$$
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3 = u_1v_2 - u_2v_1. \tag{81}$$

Pertanto è

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3. \tag{82}$$

In particolare risulta

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2. \tag{83}$$

10.1 Prodotto tensoriale antisimmetrico

Il prodotto vettoriale può essere messo in relazione con il prodotto tensoriale nel seguente modo. In corrispondenza dei due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si consideri il tensore

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}. \tag{84}$$

Come qualsiasi tensore questo può essere espresso come la somma della parte simmetrica e della parte antisimmetrica

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \operatorname{sym}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + \operatorname{skw}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}), \tag{85}$$

dove

$$\operatorname{sym}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^{\mathsf{T}}), \qquad \operatorname{skw}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^{\mathsf{T}}). \tag{86}$$

Essendo la matrice di $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$

$$\begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ u_1 v_2 & u_2 v_2 & u_3 v_2 \\ u_1 v_3 & u_2 v_3 & u_3 v_3 \end{pmatrix}, \tag{87}$$

la matrice della parte antisimmetrica risulta

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & u_2 v_1 - v_2 u_1 & u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 & 0 & u_3 v_2 - v_3 u_2 \\ u_1 v_3 - v_1 u_3 & u_2 v_3 - v_2 u_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Si osservi che gli elementi $(3,2)$, $(1,3)$ e $(2,1)$ di questa matrice, a meno del fattore $1/2$, sono uguali alle componenti del vettore (82). Esiste dunque una corrispondeza biunivoca tra i vettori $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ e i tensori $\operatorname{skw}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$, risultando $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ il vettore assiale di $2\operatorname{skw}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$.

10.2 Rotazioni e prodotto vettoriale

In uno spazio euclideo di dimensione 3, per la definizione data di prodotto vettoriale, si ha in corrispondenza di una coppia di vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \operatorname{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \qquad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}. \tag{89}$$

Applicando una rotazione $\mathbf{R}$ si ottiene

$$(\mathbf{R}\mathbf{u} \times \mathbf{R}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{R}\mathbf{w} = \operatorname{vol}(\mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{w}) = \operatorname{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \tag{90}$$

da cui deriva che $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}$

$$(\mathbf{R}\mathbf{u} \times \mathbf{R}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \tag{91}$$

$$\mathbf{R}^{\mathsf{T}}(\mathbf{R}\mathbf{u} \times \mathbf{R}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \tag{92}$$

Risulta pertanto

$$\mathbf{R}^{\mathsf{T}}(\mathbf{R}\mathbf{u} \times \mathbf{R}\mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \tag{93}$$

da cui si ottiene infine, essendo $\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R} = \mathbf{I}$,

$$\mathbf{R}\mathbf{u} \times \mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{R}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}). \tag{94}$$

11 Curve in uno spazio euclideo

Si consideri uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione n. Si dice *curva* una funzione

$$\boldsymbol{c} : \mathcal{I} \to \mathcal{E}, \tag{95}$$

con $\mathcal{I}$ intervallo aperto di $\mathbb{R}$, tale che, in corrispondenza di un sistema di coordinate affine definito da $\boldsymbol{\psi}$, la funzione

$$\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{c} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n \tag{96}$$

sia C^∞. Con ciò si intende che, esprimendo la funzione (95) in termini di coordinate

$$\boldsymbol{c}(s) = \boldsymbol{o} + c_1(s)\mathbf{e}_1 + c_2(s)\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n(s)\mathbf{e}_n, \tag{97}$$

le funzioni c_i siano C^∞.

Si dice *vettore tangente* alla curva $\boldsymbol{c}$ in $s \in \mathcal{I}$ il vettore

$$\boldsymbol{c}'(s) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\boldsymbol{c}(s+h) - \boldsymbol{c}(s)). \tag{98}$$

Tale vettore esiste poiché per la (97) si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\boldsymbol{c}(s+h) - \boldsymbol{c}(s)) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(\big(c_1(s+h) - c_1(s)\big)\mathbf{e}_1 + \cdots + \big(c_n(s+h) - c_n(s)\big)\mathbf{e}_n\Big) \\ &= \frac{dc_1}{ds}(s)\mathbf{e}_1 + \cdots + \frac{dc_n}{ds}(s)\mathbf{e}_n \end{aligned} \tag{99}$$

Si noti che curve diverse possono avere la stessa immagine. In generale due curve $\boldsymbol{c} : \mathcal{I}_{\boldsymbol{c}} \to \mathcal{E}$, $\boldsymbol{g} : \mathcal{I}_{\boldsymbol{g}} \to \mathcal{E}$ aventi la stessa immagine $\mathcal{C}$ hanno tangenti diverse in punti corrispondenti. Si consideri infatti la funzione

$$\sigma : \mathcal{I}_{\boldsymbol{c}} \to \mathcal{I}_{\boldsymbol{g}} \tag{100}$$

tale che $\boldsymbol{c}(s) = \boldsymbol{g}(\sigma(s))$. Dalla definizione (98) e dalla (99) risulta

$$\boldsymbol{c}'(s) = \boldsymbol{g}'(\sigma(s))\sigma'(s), \tag{101}$$

avendo posto $\sigma'(s) := d\sigma(s)/ds$.

Spesso con il termine *curva* si indica il sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ immagine di $\boldsymbol{c}$. Una funzione (95) si dice *parametrizzazione* della curva $\mathcal{C}$ se il vettore tangente è diverso dal vettore nullo in ogni punto. Se $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{g}$ sono due parametrizzazioni della stessa curva, la funzione (100) si dice *riparametrizzazione*.

11.1 Lunghezza di una curva

Si consideri l'arco di curva compreso tra i punti p_A e p_B della curva $\mathcal{C}$ e due parametrizzazioni $\boldsymbol{c} : \mathcal{I}_{\boldsymbol{c}} \to \mathcal{E}$, $\boldsymbol{g} : \mathcal{I}_{\boldsymbol{g}} \to \mathcal{E}$. Indicando con $[z_\mathsf{A}, z_\mathsf{B}]$, $[s_\mathsf{A}, s_\mathsf{B}]$ i corrispondenti intervalli contenuti in $\mathcal{I}_{\boldsymbol{c}}$ e $\mathcal{I}_{\boldsymbol{g}}$ e con σ la riparametrizzazione (100), risulta, attraverso il cambiamento di variabile $z = \sigma(s)$ e per la (101),

$$l_\mathsf{AB} := \int_{z_\mathsf{A}}^{z_\mathsf{B}} \|\boldsymbol{g}'(z)\| dz = \int_{s_\mathsf{A}}^{s_\mathsf{B}} \|\boldsymbol{g}'(\sigma(s))\| |\sigma'(s)| ds = \int_{s_\mathsf{A}}^{s_\mathsf{B}} \|\boldsymbol{c}'(s)\| ds. \tag{102}$$

Tale scalare, che risulta dipendere solo dalla immagine $\mathcal{C}$, per una fissata norma di $\mathcal{V}$, si dice *lunghezza* dell'arco di curva.

Si noti che qualunque sia la parametrizzazione $\boldsymbol{c}$, se la riparametrizzazione σ è tale che $\sigma(s_\mathsf{B})-\sigma(s_\mathsf{A})$ ha il significato di *lunghezza dell'arco di curva* tra i punti $\boldsymbol{c}(s_\mathsf{A})$ e $\boldsymbol{c}(s_\mathsf{B})$, essendo

$$\sigma(s_\mathsf{B})-\sigma(s_\mathsf{A})=l_\mathsf{AB}=\int_{s_\mathsf{A}}^{s_\mathsf{B}}\|\boldsymbol{c}'(s)\|ds, \tag{103}$$

$$\sigma(s_\mathsf{B})-\sigma(s_\mathsf{A})=\int_{s_\mathsf{A}}^{s_\mathsf{B}}\sigma'(s)ds, \tag{104}$$

risulta $\sigma'(s)=\|\boldsymbol{c}'(s)\|$ e, per la (101), $\|\boldsymbol{g}'(z)\|=1$. In una parametrizzazione in cui il parametro ha il significato di lunghezza di un arco di curva i vettori tangenti hanno dunque norma unitaria.

12 Campi scalari, campi vettoriali e gradienti

Un *campo scalare* su uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ è una funzione

$$\alpha:\mathcal{E}\to\mathbb{R} \tag{105}$$

che assegna ad ogni posizione un numero reale.

Scelta una parametrizzazione (20), eventualmente indotta da un sistema di coordinate, il campo scalare (105) può essere descritto, in uno spazio euclideo di dimensione 3, dalla funzione

$$\hat{\alpha}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \tag{106}$$

tale che

$$\alpha(\mathsf{p}_\mathsf{A})=\alpha(\boldsymbol{\kappa}(s_1,s_2,s_3))=\hat{\alpha}(s_1,s_2,s_3) \tag{107}$$

essendo $\mathsf{p}_\mathsf{A}=\boldsymbol{\kappa}(s_1,s_2,s_3)$.

Si dice *derivata del campo scalare α lungo la curva $\boldsymbol{c}$* in $\boldsymbol{c}(0)$ lo scalare

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\alpha(\boldsymbol{c}(h))-\alpha(\boldsymbol{c}(0))\Big). \tag{108}$$

Descrivendo la curva attraverso la (97) e il campo scalare attraverso la (106) l'espressione della derivata diventa

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\alpha(\boldsymbol{c}(h))-\alpha(\boldsymbol{c}(0))\Big)\\&\quad=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\hat{\alpha}\big(c_1(h),c_2(h),c_3(h)\big)-\hat{\alpha}\big(c_1(0),c_2(0),c_3(0)\big)\Big)\\&\quad=\sum_{i=1}^{3}\partial_i\hat{\alpha}\big(c_1(0),c_2(0),c_3(0)\big)\frac{dc_i}{dh}(0),\end{aligned} \tag{109}$$

dove con $\partial_i\hat{\alpha}$ si intende la derivata della funzione $\hat{\alpha}$ rispetto all'argomento i-esimo.

Per la (99), dalla (109) risulta che la derivata di un campo scalare lungo una curva dipende solo dal vettore tangente alla curva. Si può dunque riguardare la (109) come la espressione di una funzione

$$\nabla\alpha:\mathcal{V}\to\mathbb{R} \tag{110}$$

che, in corrispondenza della posizione p_A, trasforma un vettore $\mathbf{v}$ nella derivata del campo α lungo una qualsiasi curva per p_A che abbia $\mathbf{v}$ come vettore tangente in p_A. Tale funzione si dice *gradiente del campo scalare α in* p_A. Si noti che, ad esempio, per la retta $\boldsymbol{c}(h)=\mathsf{p}_\mathsf{A}+h\mathbf{e}_1$ si ha dalla (109)

$$\begin{aligned}\nabla\alpha\,\mathbf{e}_1&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\alpha(\mathsf{p}_\mathsf{A}+h\mathbf{e}_1)-\alpha(\mathsf{p}_\mathsf{A})\big)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\hat{\alpha}(s_1+h,s_2,s_3)-\hat{\alpha}(s_1,s_2,s_3)\big)=\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial s_1},\end{aligned} \tag{111}$$

essendo la derivata calcolata in corrispondenza di $\mathsf{p_A}$. Per una retta $\boldsymbol{c}(h) = \mathsf{p_A} + h\mathbf{v}$, con $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, si ha

$$\begin{aligned}\nabla\alpha\,\mathbf{v} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\alpha(\mathsf{p_A}+h\mathbf{v})-\alpha(\mathsf{p_A})\big) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\hat\alpha(s_1+hv_1, s_2+hv_2, s_3+hv_3)-\hat\alpha(s_1,s_3,s_3)\big)\\ &= \frac{\partial\hat\alpha}{\partial s_1}v_1 + \frac{\partial\hat\alpha}{\partial s_2}v_2 + \frac{\partial\hat\alpha}{\partial s_3}v_3.\end{aligned} \tag{112}$$

Dunque $\nabla\alpha$ è una applicazione lineare. La sua matrice, con una sola riga, risulta

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\hat\alpha}{\partial s_1} & \dfrac{\partial\hat\alpha}{\partial s_2} & \dfrac{\partial\hat\alpha}{\partial s_3}\end{pmatrix}. \tag{113}$$

Un *campo vettoriale* su uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ è una funzione

$$\mathbf{u} : \mathcal{E} \to \mathcal{V} \tag{114}$$

che assegna ad ogni posizione un vettore. Fissata una parametrizzazione $\boldsymbol{\kappa}$, il campo vettoriale (114) può essere descritto, in uno spazio euclideo di dimensione 3, dalle funzioni scalari

$$u_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{115}$$

tali che

$$\mathbf{u}(\mathsf{p_A}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\kappa}(s_1,s_2,s_3)) = u_1(s_1,s_2,s_3)\mathbf{e}_1 + u_2(s_1,s_2,s_3)\mathbf{e}_2 + u_3(s_1,s_2,s_3)\mathbf{e}_3, \tag{116}$$

essendo $\mathsf{p_A} = \boldsymbol{\kappa}(s_1,s_2,s_3)$. Si dice *derivata del campo vettoriale* $\mathbf{u}$ *lungo la curva* $\boldsymbol{c}$ in $\boldsymbol{c}(0)$ il vettore

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\mathbf{u}(\boldsymbol{c}(h)) - \mathbf{u}(\boldsymbol{c}(0))\Big). \tag{117}$$

Descrivendo la curva attraverso la (97) e il campo vettoriale attraverso le (115) l'espressione della derivata diventa

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\mathbf{u}(\boldsymbol{c}(h)) - \mathbf{u}(\boldsymbol{c}(0))\Big)\\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{3}\Big(u_i(c_1(h),c_2(h),c_3(h)) - u_i(c_1(0),c_2(0),c_3(0))\Big)\mathbf{e}_i\\ &\quad= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\partial_j u_i(c_1(0),c_2(0),c_3(0))\frac{dc_j}{dh}(0)\mathbf{e}_i.\end{aligned} \tag{118}$$

La derivata di un campo vettoriale lungo una curva dipende dunque solo dal vettore tangente alla curva. Come per la derivata di un campo scalare la (118) induce, in corrispondenza di una posizione $\mathsf{p_A}$, un tensore, detto *gradiente del campo vettoriale* $\mathbf{u}$ *in* $\mathsf{p_A}$,

$$\nabla\mathbf{u} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \tag{119}$$

tale che

$$\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{e}_j = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\mathbf{u}(\mathsf{p_A}+h\mathbf{e}_j) - \mathbf{u}(\mathsf{p_A})\big) = \frac{\partial u_1}{\partial s_j}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial s_j}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_j}\mathbf{e}_3. \tag{120}$$

La sua matrice risulta

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial s_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial s_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial s_3}\\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial s_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial s_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial s_3}\\[2ex] \dfrac{\partial u_3}{\partial s_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial s_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial s_3}\end{pmatrix}. \tag{121}$$

13 Divergenza di campi vettoriali e campi tensoriali

La divergenza di un campo vettoriale $\mathbf{v}$ è il campo scalare

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} \nabla \mathbf{v} \tag{122}$$

Si noti che in corrispondenza di un campo tensoriale $\mathbf{A}$ uniforme risulta, dalla definizione di prodotto scalare tra tensori e di gradiente di un campo vettoriale,

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{w} = \operatorname{tr} \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \nabla \mathbf{w}\right) = \operatorname{tr} \nabla \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{w}\right) = \operatorname{div} \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{w}\right) \tag{123}$$

Si definisce divergenza di un campo tensoriale $\mathbf{T}$ quel campo vettoriale $\operatorname{div} \mathbf{T}$ tale che

$$\operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{w} = \operatorname{div} \left(\mathbf{T}^{\mathsf{T}} \mathbf{w}\right) - \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{w} \tag{124}$$

per qualunque campo vettoriale $\mathbf{w}$ regolare. In particolare, se $\mathbf{e}_i$ è un campo vettoriale uniforme risulta, essendo nullo il suo gradiente,

$$\operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i = \operatorname{div} \left(\mathbf{T}^{\mathsf{T}} \mathbf{e}_i\right). \tag{125}$$

Indicando con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale (costituita da campi vettoriali uniformi) e ponendo

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_i = \mathbf{t}_{1i}\mathbf{e}_1 + \mathbf{t}_{2i}\mathbf{e}_2 + \mathbf{t}_{3i}\mathbf{e}_3, \tag{126}$$

si ha

$$\mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_i = \mathbf{t}_{i1}\mathbf{e}_1 + \mathbf{t}_{i2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{t}_{i3}\mathbf{e}_3, \tag{127}$$

da cui, per definizione di derivata di un campo vettoriale lungo una direzione, si ottiene

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_1 &= \partial_1 \mathbf{t}_{i1}\mathbf{e}_1 + \partial_1 \mathbf{t}_{i2}\mathbf{e}_2 + \partial_1 \mathbf{t}_{i3}\mathbf{e}_3, \\
\nabla(\mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_2 &= \partial_2 \mathbf{t}_{i1}\mathbf{e}_1 + \partial_2 \mathbf{t}_{i2}\mathbf{e}_2 + \partial_2 \mathbf{t}_{i3}\mathbf{e}_3, \\
\nabla(\mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_3 &= \partial_3 \mathbf{t}_{i1}\mathbf{e}_1 + \partial_3 \mathbf{t}_{i2}\mathbf{e}_2 + \partial_3 \mathbf{t}_{i3}\mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{128}$$

Risulta pertanto

$$\operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i = \operatorname{div} \left(\mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_i\right) = \operatorname{tr} \nabla \left(\mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_i\right) = \partial_1 \mathbf{t}_{i1} + \partial_2 \mathbf{t}_{i2} + \partial_3 \mathbf{t}_{i3}. \tag{129}$$

Infine, per un campo vettoriale $\mathbf{v}$ su un dominio $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ con bordo $\partial\mathcal{R}$ regolare a tratti, per il *teorema della divergenza* si ha

$$\int_{\mathcal{R}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA \tag{130}$$

essendo $\mathbf{n}$ il campo dei versori esterni normali ai tratti regolari del bordo.