# Calcolo della matrice di una rotazione

Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale in uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$. Costruire in tale base la matrice della rotazione con asse parallelo a

$$\mathbf{u} := \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3$$

e ampiezza $\theta := \pi/6$.

---

Si genera una base ortonormale

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$$

con

$$\mathbf{a}_3 := \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Indicando le componenti di $\mathbf{u}$ nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$[\mathbf{u}]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

le componenti del vettore $\mathbf{a}_3$ risultano

$$[\mathbf{a}_3]_e = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dato un vettore $\mathbf{v}$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio ortogonale ad $\mathbf{a}_3$ è

$$\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3)\,\mathbf{a}_3.$$

Infatti, essendo $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1$, risulta

$$(\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3)\,\mathbf{a}_3) \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3)\,\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 0.$$

Il vettore $\mathbf{a}_2$ può pertanto essere generato a partire da un arbitrario vettore $\mathbf{v}$. Ad esempio in corrispondenza di

$$\mathbf{v} := 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3.$$

si ottiene il vettore ortogonale ad $\mathbf{a}_3$ di componenti

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{13}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix},$$

dalle quali, dividendo per la norma, si ottengono le componenti di $\mathbf{a}_2$

$$[\mathbf{a}_2]_e := \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il vettore $\mathbf{a}_1$, essendo definito come

$$\mathbf{a}_1 := \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3,$$

ha componenti

$$[\mathbf{a}_1]_e = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si può ora costruire la matrice della rotazione $\mathbf{R}$ nella base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$

$$[\mathbf{R}]_a := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per ottenere la matrice di $\mathbf{R}$ nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ si utilizza, nella formula del cambiamento di base, la matrice che ha per colonne le componenti dei vettori $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$[\mathbf{A}] := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{42}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}.$$

Si noti che, essendo le basi ortonormali, la matrice $[\mathbf{A}]$ risulta tale che

$$[\mathbf{A}]^{-1} = [\mathbf{A}]^T.$$

Pertanto la matrice cercata è

$$[\mathbf{R}]_e := [\mathbf{A}]\,[\mathbf{R}]_a\,[\mathbf{A}]^T = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 2+13\sqrt{3} & 4-2\sqrt{3}-3\sqrt{14} & 6-3\sqrt{3}+2\sqrt{14} \\ 4-2\sqrt{3}+3\sqrt{14} & 8+10\sqrt{3} & 16-6\sqrt{3}-\sqrt{14} \\ 6-3\sqrt{3}-2\sqrt{14} & 12-6\sqrt{3}+\sqrt{14} & 18+5\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione numerica approssimata delle matrici calcolate è la seguente

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} -0.57735 & 0.771517 & 0.267261 \\ -0.57735 & -0.617213 & 0.534522 \\ 0.57735 & 0.154303 & 0.801784 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{R}]_e = \begin{pmatrix} 0.875595 & -0.381753 & 0.29597 \\ 0.420031 & 0.904304 & -0.0762129 \\ -0.238552 & 0.191048 & 0.952152 \end{pmatrix}.$$