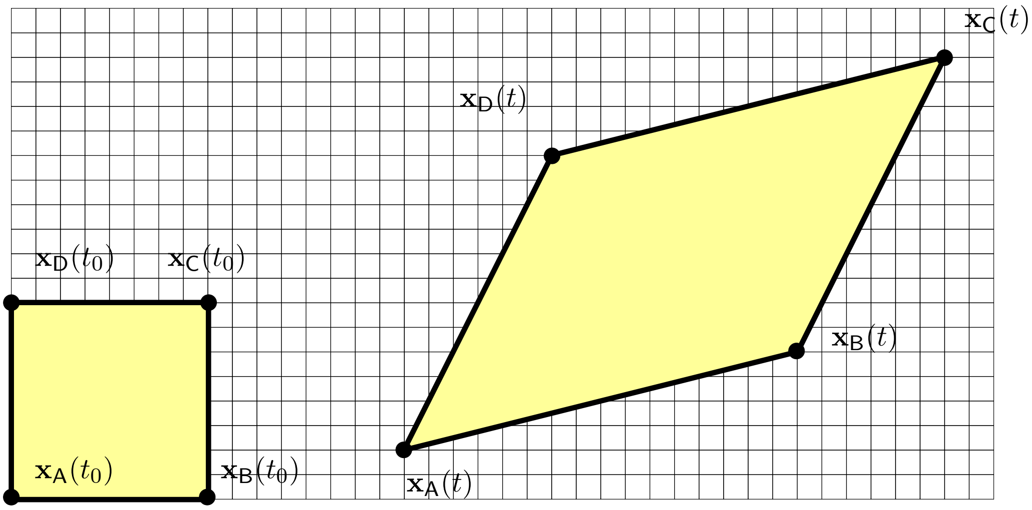
# Deformazione affine




Un corpo assume all'istante $t_0$ e all'istante $t$ le due forme rappresentate nel disegno. Assumendo che la deformazione sia affine:

- costruire la matrice del gradiente della deformazione;
- costruire la dilatazione e la rotazione corrispondenti;
- descrivere le direzioni principali della dilatazione e indicare le dilatazioni principali;
- calcolare l'ampiezza della rotazione;
- calcolare il rapporto tra le aree delle due forme del corpo.

Ai fini del calcolo si scelga un sistema di coordinate cartesiano, fissando un'origine e una base ortonormale.

---

Scelta l'origine in $\mathbf{x}_A(t_0)$ e una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ adattata al reticolo tracciato, le posizioni siano descritte dalle espressioni seguenti

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_A(t_0) &= \mathbf{o}\\
\mathbf{x}_B(t_0) &= \mathbf{o} + 8\mathbf{e}_1\\
\mathbf{x}_D(t_0) &= \mathbf{o} + 8\mathbf{e}_2\\
\mathbf{x}_A(t) &= \mathbf{o} + 16\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\\
\mathbf{x}_B(t) &= \mathbf{o} + 32\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2\\
\mathbf{x}_D(t) &= \mathbf{o} + 22\mathbf{e}_1 + 14\mathbf{e}_2
\end{aligned}
$$

Dunque $\mathbf{F}$ è tale che

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t_0) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t_0)) &= \mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)\\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\mathsf{D}}(t_0) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t_0)) &= \mathbf{x}_{\mathsf{D}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)\end{aligned}$$

Sostituendo le coordinate si ottiene la seguente matrice di $\mathbf{F}$

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 2 & 0.75 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

La matrice del tensore di Cauchy-Green è, nella rappresentazione approssimata dei reali,

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 4.25 & 2.25 \\ 2.25 & 2.8125 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori sono

$$\eta_1 = 1.16924, \quad \eta_2 = 5.89326$$

Pertanto le dilatazioni principali sono

$$\lambda_1 = \sqrt{1.16924} = 1.08131, \quad \lambda_2 = \sqrt{5.89326} = 2.4276$$

Le matrici delle proiezioni sugli autospazi di $\mathbf{C}$ sono rispettivamente

$$[\mathbf{P}_1] = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2}[\mathbf{C} - \eta_2\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 0.347852 & -0.476289 \\ -0.476289 & 0.652148 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{P}_2] = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1}[\mathbf{C} - \eta_1\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 0.652148 & 0.476289 \\ 0.476289 & 0.347852 \end{pmatrix}$$

La matrice della dilatazione risulta dunque

$$[\mathbf{U}] = [\lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 1.95929 & 0.641223 \\ 0.641223 & 1.54962 \end{pmatrix}$$

Infine per la matrice della rotazione $\mathbf{R}$ tale che $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ si ha

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}] = [\mathbf{F}(\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{P}_2)] = \begin{pmatrix} 0.997459 & 0.071247 \\ -0.071247 & 0.997459 \end{pmatrix}$$

La ampiezza della rotazione risulta $\theta = -0.0226979\pi$.

Il rapporto tra le aree delle due forme del corpo è

$$\det \mathbf{F} = 2.625$$

Una descrizione della deformazione vista come successione della dilatazione $\mathbf{U}$ e poi della rotazione $\mathbf{R}$, senza la traslazione che porta $\mathbf{x}_\mathsf{A}(t_0)$ in $\mathbf{x}_\mathsf{A}(t)$, è data nella fig.1: la figura in rosso è trasformata da $\mathbf{U}$ nella figura in verde e poi da $\mathbf{R}$ nella figura in viola.

Una descrizione della stessa deformazione applicata ad un disco di centro $\mathbf{x}_\mathsf{A}(t_0)$, senza la traslazione che porta $\mathbf{x}_\mathsf{A}(t_0)$ in $\mathbf{x}_\mathsf{A}(t)$, è data nella fig.2: i semiassi dell'ellisse in verde corrispondono alle direzioni principali di $\mathbf{U}$. Questi sono poi ruotati da $\mathbf{R}$.

Una procedura equivalente consiste nel calcolare, invece che le matrici delle proiezioni $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, direttamente gli autovettori di $[\mathbf{C}]$, normalizzarli e disporli come colonne nella matrice che definisce un cambiamento di base

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} -0.58979 & 0.807557 \\ 0.807557 & 0.58979 \end{pmatrix}$$

Essendo gli autovettori ortonormali la matrice $[\mathbf{A}]$ risulta ortogonale. Ne deriva che $[\mathbf{A}]^{-1} = [\mathbf{A}]^\mathsf{T}$ e

$$[\mathbf{A}]^\mathsf{T}[\mathbf{C}][\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

Essendo allora

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} [\mathbf{A}]^\mathsf{T}$$

la matrice di $\mathbf{U}$ si può calcolare utilizzando l'espressione

$$[\mathbf{U}] = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} [\mathbf{A}]^\mathsf{T}$$

Per la matrice di $\mathbf{R}$ si può utilizzare la espressione della inversa di $[\mathbf{U}]$

$$[\mathbf{U}]^{-1} = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} [\mathbf{A}]^\mathsf{T}$$

ottenendo

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}] = [\mathbf{F}][\mathbf{U}]^{-1} = [\mathbf{F}][\mathbf{A}] \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} [\mathbf{A}]^\mathsf{T}$$

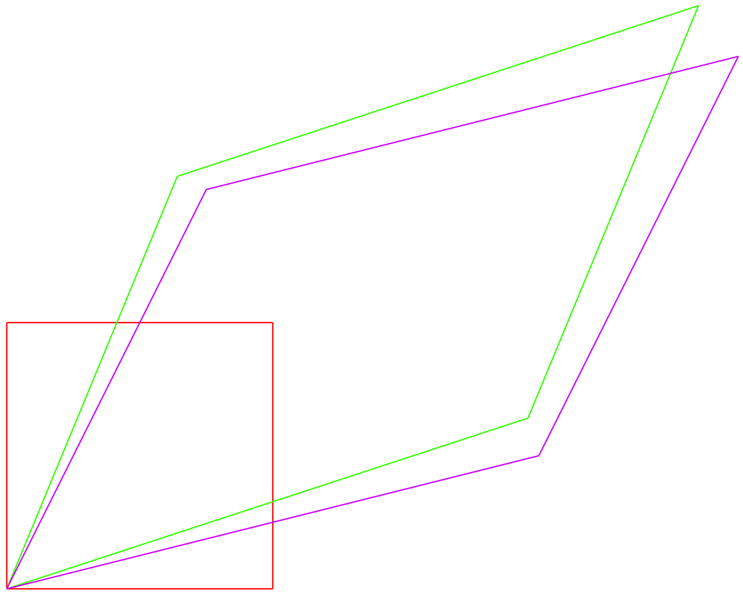


Figura 1: La dilatazione seguita dalla rotazione (rosso,verde,viola)

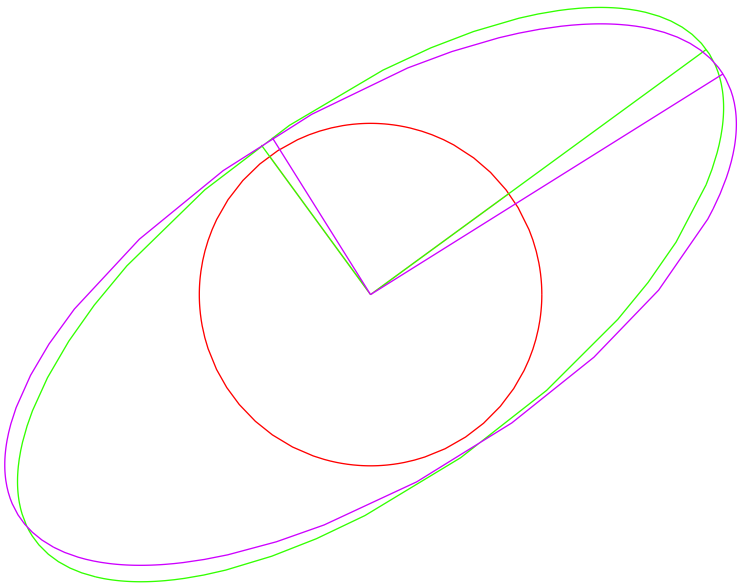


Figura 2: La dilatazione seguita dalla rotazione (rosso,verde,viola)