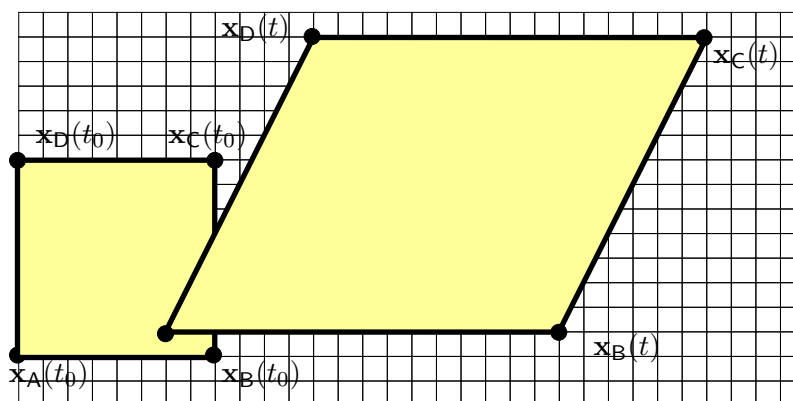


Deformazione affine



Un corpo assume all'istante t_0 e all'istante t le due forme rappresentate nel disegno. Assumendo che la deformazione sia affine:

- costruire la matrice del gradiente della deformazione;
- costruire la dilatazione e la rotazione corrispondenti;
- descrivere le direzioni principali della dilatazione e indicare le dilatazioni principali;
- calcolare l'ampiezza della rotazione;
- calcolare il rapporto tra le aree delle due forme del corpo.

Ai fini del calcolo si scelga un sistema di coordinate cartesiane, fissando un'origine e una base ortonormale.

Scelta l'origine in $\mathbf{x}_A(t_0)$ e una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ adattata al reticolo tracciato, le posizioni siano descritte dalle espressioni seguenti

$$\mathbf{x}_A(t_0) = \mathbf{o}$$

$$\mathbf{x}_B(t_0) = \mathbf{o} + 4\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{x}_D(t_0) = \mathbf{o} + 4\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_A(t) = \mathbf{o} + 3\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_B(t) = \mathbf{o} + 11\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_D(t) = \mathbf{o} + 6\mathbf{e}_1 + \frac{13}{2}\mathbf{e}_2$$

Dunque \mathbf{F} è tale che

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}_B(t_0) - \mathbf{x}_A(t_0)) &= \mathbf{x}_B(t) - \mathbf{x}_A(t) \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_D(t_0) - \mathbf{x}_A(t_0)) &= \mathbf{x}_D(t) - \mathbf{x}_A(t)\end{aligned}$$

Sostituendo le coordinate si ottiene la seguente matrice di \mathbf{F}

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 2 & 0.75 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

La matrice del tensore di Cauchy-Green è, nella rappresentazione approssimata dei reali,

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T [\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 1.5 & 2.8125 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori sono

$$\eta_1 = 1.79301, \quad \eta_2 = 5.01949$$

Pertanto le dilatazioni principali sono

$$\lambda_1 = \sqrt{1.79301} = 1.33903, \quad \lambda_2 = \sqrt{5.01949} = 2.24042$$

Le matrici delle proiezioni sugli autospazi di \mathbf{C} sono rispettivamente

$$[\mathbf{P}_1] = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} [\mathbf{C} - \eta_2 \mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 0.315976 & -0.464903 \\ -0.464903 & 0.684024 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{P}_2] = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} [\mathbf{C} - \eta_1 \mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 0.684024 & 0.464903 \\ 0.464903 & 0.315976 \end{pmatrix}$$

La matrice della dilatazione risulta dunque

$$[\mathbf{U}] = [\lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 1.9556 & 0.419058 \\ 0.419058 & 1.62385 \end{pmatrix}$$

Infine per la matrice della rotazione \mathbf{R} tale che $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ si ha

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}] = [\mathbf{F}(\frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{P}_2)] = \begin{pmatrix} 0.977802 & 0.209529 \\ -0.209529 & 0.977802 \end{pmatrix}$$

La ampiezza della rotazione risulta $\theta = -0.0671931\pi$. Il rapporto tra le aree delle due forme del corpo è

$$\det \mathbf{F} = 3$$

Una procedura equivalente per il calcolo della dilatazione e della rotazione (si veda ESERCIZIO[2-1]) consiste nel calcolare esplicitamente gli autovettori di $[\mathbf{C}]$, invece che le matrici delle proiezioni \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 , normalizzarli e disporli come colonne della matrice che definisce un cambiamento di base. In questo caso tale matrice risulta

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} -0.562117 & 0.827058 \\ 0.827058 & 0.562117 \end{pmatrix}$$

Una descrizione della deformazione vista come successione della dilatazione \mathbf{U} e poi della rotazione \mathbf{R} , senza la traslazione che porta $\mathbf{x}_A(t_0)$ in $\mathbf{x}_A(t)$, è data nella fig.1: la figura in rosso è trasformata da \mathbf{U} nella figura in verde e poi da \mathbf{R} nella figura in viola.

Una descrizione alternativa della stessa deformazione applicata ad un disco di centro $\mathbf{x}_A(t_0)$, senza la traslazione che porta $\mathbf{x}_A(t_0)$ in $\mathbf{x}_A(t)$, è data nella fig.2: i semiassi dell'ellisse in verde corrispondono alle direzioni principali di \mathbf{U} . Questi sono poi ruotati da \mathbf{R} .

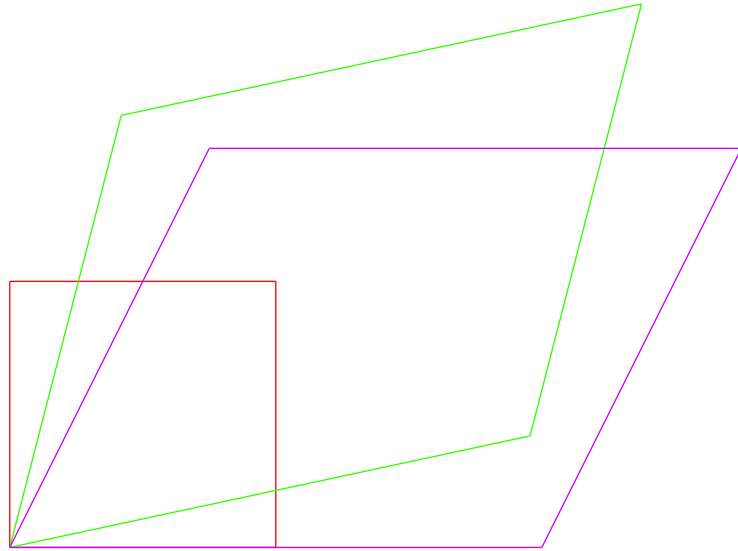


Figura 1: La dilatazione seguita dalla rotazione (rosso,verde,viola)

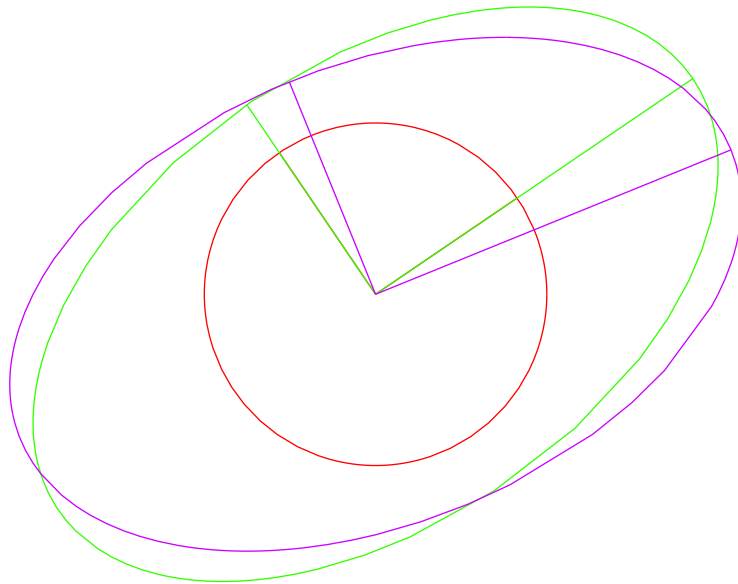


Figura 2: La dilatazione seguita dalla rotazione (rosso,verde,viola)