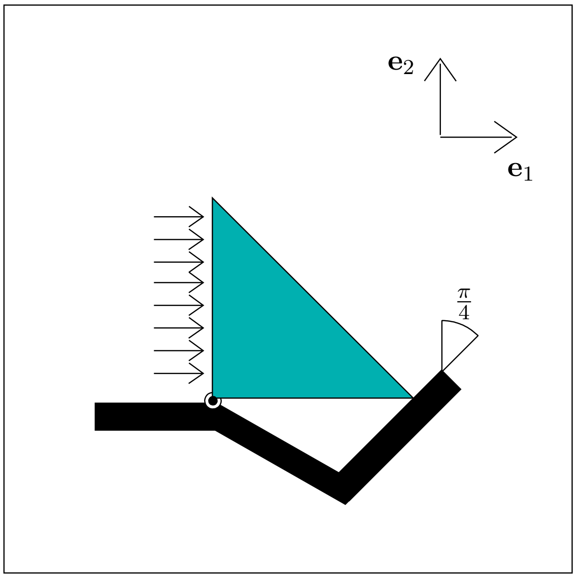
Corpo affine elastico vincolato



Un corpo a forma di prisma retto di sezione triangolare, con spigoli paralleli a $\mathbf{e}_1$ di lunghezza ℓ_1, spigoli paralleli a $\mathbf{e}_2$ di lunghezza ℓ_2 e spigoli paralleli a $\mathbf{e}_3$ di lunghezza ℓ_3, sia soggetto ad un sistema di forze costituito da una distribuzione uniforme $p\mathbf{e}_1$ sulla faccia sinistra, come in figura.

Il corpo sia disposto su un supporto rigido in modo che lo spigolo inferiore sinistro possa solo scorrere in una guida lungo $\mathbf{e}_3$, mentre lo spigolo in basso a destra sia vincolato a scorrere sul piano di normale $\mathbf{n} = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$, come in figura.

Utilizzando il modello di corpo affine e assumendo che il materiale sia elastico e isotropo:

1. descrivere i vincoli sul campo di spostamento e sugli atti di moto;
2. calcolare la tensione, la dilatazione infinitesima, il campo di spostamento;
3. caratterizzare le forze reattive.

Atti di moto compatibili con i vincoli

Gli atti di moto test sono descritti dalla espressione

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w}_O + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_O). \tag{1}$$

Il polo $\bar{\mathbf{x}}_O$ sia al centro dello spigolo sinistro della faccia inferiore. Le posizioni dello spigolo sinistro della faccia inferiore sono descritte dalla espressione

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_O + \zeta_3\mathbf{e}_3 \tag{2}$$

la velocità corrispondente è

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w}_O + \mathbf{G}(\zeta_3\mathbf{e}_3). \tag{3}$$

La condizione imposta dal vincolo è

$$\big(\mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(\zeta_3\mathbf{e}_3)\big)\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{4}$$
$$\big(\mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(\zeta_3\mathbf{e}_3)\big)\cdot\mathbf{e}_2 = 0. \tag{5}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché siano nulli i due polinomi

$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 \tag{6}$$
$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_2 + \zeta_3\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 \tag{7}$$

è che risulti

$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{8}$$
$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_2 = 0, \tag{9}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{10}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 = 0. \tag{11}$$

Le posizioni dello spigolo destro della faccia inferiore sono descritte dalla espressione

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}} + \ell_1\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{e}_3. \tag{12}$$

La velocità corrispondente è

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(\ell_1\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{e}_3). \tag{13}$$

La condizione imposta dal vincolo è

$$\big(\mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(\ell_1\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{e}_3)\big)\cdot(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 0. \tag{14}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché sia nullo il polinomio

$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}}\cdot(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + \ell_1\mathbf{G}\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + \zeta_3\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \tag{15}$$

è che risulti

$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_2 = -\ell_1\mathbf{G}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + \ell_1\mathbf{G}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2, \tag{16}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2. \tag{17}$$

Le condizioni imposte dai vincoli sono pertanto

$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{18}$$
$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_2 = 0, \tag{19}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{20}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 = 0, \tag{21}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{G}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2. \tag{22}$$

ovvero

$$w_1 = 0, \tag{23}$$
$$w_2 = 0, \tag{24}$$
$$g_{13} = 0, \tag{25}$$
$$g_{23} = 0, \tag{26}$$
$$g_{11} = g_{21}. \tag{27}$$

In un atto di moto *compatibile con i vincoli* la terna delle componenti di $\mathbf{w}_\mathsf{O}$ e la matrice del gradiente della velocità hanno dunque in generale la forma

$$[\mathbf{w}_\mathsf{O}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{G}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{11} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Risultante e momento risultante delle forze attive

Le posizioni della faccia sinistra sono descritte dalla espressione

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{O} + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta_2\mathbf{e}_2 + \zeta_3\mathbf{e}_3 \tag{29}$$

$$\mathbf{f}^a = \int_{-\frac{\ell_3}{2}}^{\frac{\ell_3}{2}} \int_{-\frac{\ell_2}{2}}^{\frac{\ell_2}{2}} (p\mathbf{e}_1)\, d\zeta_2 d\zeta_3 = p\ell_2\ell_3\, \mathbf{e}_1 \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_\mathsf{O}} &= \int_{-\frac{\ell_3}{2}}^{\frac{\ell_3}{2}} \int_{-\frac{\ell_2}{2}}^{\frac{\ell_2}{2}} (\frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta_2\mathbf{e}_2 + \zeta_3\mathbf{e}_3) \otimes (p\mathbf{e}_1)\, d\zeta_2 d\zeta_3 \\ &= p\frac{\ell_2^2\ell_3}{2}\, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \end{aligned} \tag{31}$$

$$[\mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_\mathsf{O}}] = \begin{pmatrix} 0 & p\dfrac{\ell_2}{\ell_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\ell_1\ell_2\ell_3}{2}. \tag{32}$$

Principio di bilancio

Dal principio della potenza virtuale si ha in particolare che, essendo nulla la potenza delle forze reattive per atti di moto compatibili con i vincoli, deve essere

$$\mathbf{f}^a \cdot \mathbf{w}_\mathsf{O}^{\mathrm{v}} + \left(\mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_\mathsf{O}} - \mathbf{T}\ \mathrm{vol}\,\mathcal{R}\right) \cdot \mathbf{G}^{\mathrm{v}} = 0, \tag{33}$$

con vol $\mathcal{R} = \ell_1\ell_2\ell_3/2$. Sostituendo i valori calcolati e dividendo per il volume la espressione precedente diventa

$$\begin{pmatrix} \frac{p}{\ell_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} - p\frac{\ell_2}{\ell_1} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{11} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = 0 \tag{34}$$

Espandendo il prodotto scalare si ottiene

$$\begin{pmatrix} (\sigma_{11} + \sigma_{21}) & (\sigma_{12} - p\frac{\ell_2}{\ell_1}) & \sigma_{22} & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \\ g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = 0 \tag{35}$$

Questa condizione deve valere per qualsiasi valore dei parametri g_{ij}. Deve dunque essere

$$(\sigma_{11} + \sigma_{21}) = 0, \quad (\sigma_{12} - p\frac{\ell_2}{\ell_1}) = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = 0. \tag{36}$$

La tensione $\mathbf{T}$, essendo un tensore simmetrico, ne risulta completamente determinata. La sua matrice è

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} -p\frac{\ell_2}{\ell_1} & p\frac{\ell_2}{\ell_1} & 0 \\ p\frac{\ell_2}{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Dilatazione infinitesima

La dilatazione infinitesima deve essere tale che la risposta sia la tensione calcolata. Essendo il materiale elastico e isotropo essa è data dalla espressione (inversa della funzione di risposta)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}\Big(\mathbf{T} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{T})\mathbf{I}\Big) \tag{38}$$

da cui si ottiene

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu}\left(-1 + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\right) p \frac{\ell_2}{\ell_1} \tag{39}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} p \frac{\ell_2}{\ell_1} \tag{40}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\right) p \frac{\ell_2}{\ell_1} \tag{41}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\right) p \frac{\ell_2}{\ell_1} \tag{42}$$

$$\varepsilon_{13} = 0 \tag{43}$$

$$\varepsilon_{23} = 0 \tag{44}$$

Campo di spostamento

Il campo di spostamento è

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}). \tag{45}$$

Ponendo con $\mathbf{u}_{\mathsf{O}} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e indicando la matrice della rotazione infinitesima $\mathbf{\Theta}$ con

$$[\mathbf{\Theta}] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

dalle condizioni di vincolo risulta

$$u_1 = 0, \tag{47}$$

$$u_2 = 0, \tag{48}$$

$$\varepsilon_{13} + \theta_2 = 0, \tag{49}$$

$$\varepsilon_{23} - \theta_1 = 0, \tag{50}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{21} + \theta_3. \tag{51}$$

Si ha dunque, utilizzando le espressioni già calcolate,

$$u_1 = 0, \tag{52}$$

$$u_2 = 0, \tag{53}$$

$$\theta_1 = 0, \tag{54}$$

$$\theta_2 = 0, \tag{55}$$

$$\theta_3 = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{21} = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu}\left(-2 + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\right) p \frac{\ell_2}{\ell_1}, \tag{56}$$

restando indeterminata la terza componente dello spostamento $\mathbf{u}_{\mathsf{O}}$.

Forze reattive

Le equazioni di bilancio, essendo $\mathbf{T}$ simmetrico, si possono scrivere

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{57}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} = \mathbf{T}\ \mathrm{vol}\,\mathcal{R}. \tag{58}$$

Pertanto

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} = \mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_O} + \mathbf{M}^r_{\mathbf{x}_O} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^r_{\mathbf{x}_O} = \mathbf{T}\ \mathrm{vol}\,\mathcal{R} - \mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_O}. \tag{59}$$

Risulta dunque

$$[\mathbf{M}^r_{\mathbf{x}_O}] = \begin{pmatrix} -p\dfrac{\ell_2}{\ell_1} & 0 & 0 \\ p\dfrac{\ell_2}{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\ell_1 \ell_2 \ell_3}{2}. \tag{60}$$

Infine

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^a + \mathbf{f}^r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}^r = -\mathbf{f}^a = p\ell_2\ell_3\,\mathbf{e}_1. \tag{61}$$