Moti

C'è un'altra distinzione tra diversi tipi di grandezze vettoriali che, sebbene molto importante dal punto di vista fisico, non è così necessaria dal punto di vista matematico. Si tratta della distinzione tra proprietà *longitudinali* e proprietà *rotazionali*. La direzione e la intensità di una grandezza può dipendere da qualche azione o effetto che ha luogo lungo una certa retta, oppure può dipendere da qualcosa della stessa natura di una rotazione attorno ad un asse.

[Maxwell J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford University Press, 1892, vol. I, p. 13]

Indice

1 Moti

Il *moto di un corpo* $\mathcal{B}$ è una funzione regolare

$$\chi : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \to \mathcal{E} \tag{1}$$

tale che per qualsiasi t

$$\chi_t := \chi(\cdot, t) : \mathcal{B} \to \mathcal{E} \tag{2}$$

è una configurazione e

$$\mathbf{x}_{\mathsf{A}} := \chi(\mathsf{A}, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathcal{E} \tag{3}$$

è il moto di un qualsiasi punto A. La descrizione del moto si può dare anche in termini di deformazioni. Indicando con $\bar{\mathcal{R}}$ la forma del corpo ad un fissato istante t_0, si definisce

$$\boldsymbol{\phi} : \bar{\mathcal{R}} \times \mathbb{R} \to \mathcal{E} \tag{4}$$

tale che per ogni punto $\mathsf{A} \in \mathcal{B}$ trasformi la posizione $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} = \bar{\chi}(\mathsf{A}, t_0)$ nella posizione

$$\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t) = \chi(\mathsf{A}, t) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\chi}(\mathsf{A}, t_0), t) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}, t). \tag{5}$$

L'immagine in $\mathcal{E}$ di $\mathbf{x}_{\mathsf{A}}$ si dice *traiettoria* del punto A. La *velocità* all'istante t del punto A è il vettore

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(t) := \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}(\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t+\tau) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)). \tag{6}$$

Fissato un sistema di coordinate cartesiane attraverso la scelta di una origine $\mathbf{o}$ e di una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, si può dare una descrizione del moto in termini di coordinate

$$\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t) = \mathbf{o} + \xi_{1\mathsf{A}}(t)\mathbf{e}_1 + \xi_{2\mathsf{A}}(t)\mathbf{e}_2 + \xi_{3\mathsf{A}}(t)\mathbf{e}_3. \tag{7}$$

Corrispondentemente, la espressione della velocità del punto A in termini di componenti risulta

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(t) &:= \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}((\xi_{1\mathsf{A}}(t+\tau) - \xi_{1\mathsf{A}}(t))\mathbf{e}_1 + (\xi_{2\mathsf{A}}(t+\tau) - \xi_{2\mathsf{A}}(t))\mathbf{e}_2 + (\xi_{3\mathsf{A}}(t+\tau) - \xi_{3\mathsf{A}}(t))\mathbf{e}_3) \\ &= \frac{d}{dt}\xi_{1\mathsf{A}}(t)\mathbf{e}_1 + \frac{d}{dt}\xi_{2\mathsf{A}}(t)\mathbf{e}_2 + \frac{d}{dt}\xi_{3\mathsf{A}}(t)\mathbf{e}_3.\end{aligned} \tag{8}$$

Si dice *atto di moto* l'insieme delle velocità

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(t), \dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}(t), \ldots \tag{9}$$

2 Moti rigidi

Un moto si dice *rigido* se, comunque si fissi t_0, la descrizione del moto in termini di deformazioni (4) è tale che, per ogni coppia di punti A e B, risulta ad ogni istante t

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}, t) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}, t) + \mathbf{R}(t)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}), \tag{10}$$

essendo $\mathbf{R}(t)$ una rotazione. Un *moto rigido* risulta pertanto definito dal moto di un punto qualsiasi del corpo, ad esempio A, e da $\mathbf{R}$. La espressione corrispondente per le velocità è

$$\dot{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{B}, t) = \dot{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}, t) + \dot{\mathbf{R}}(t)(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{B} - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}). \tag{11}$$

Sostituendo alla (10) la espressione in termini di moto di ciascun punto

$$\mathbf{x}_\mathsf{B}(t) = \mathbf{x}_\mathsf{A}(t) + \mathbf{R}(t)(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{B} - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}), \tag{12}$$

la (11) diventa

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathsf{B}(t) = \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{B} - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}). \tag{13}$$

Si noti che dalla (12) si ha

$$\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{B} - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A} = \mathbf{R}(t)^\mathsf{T}(\mathbf{x}_\mathsf{B}(t) - \mathbf{x}_\mathsf{A}(t)). \tag{14}$$

Sostituendo questa espressione nella (13) risulta per le velocità

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathsf{B}(t) = \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^\mathsf{T}(\mathbf{x}_\mathsf{B}(t) - \mathbf{x}_\mathsf{A}(t)). \tag{15}$$

Ponendo

$$\mathbf{W}(t) := \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^\mathsf{T}, \tag{16}$$

la (15) si può scrivere infine

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathsf{B}(t) = \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}(t) + \mathbf{W}(t)(\mathbf{x}_\mathsf{B}(t) - \mathbf{x}_\mathsf{A}(t)). \tag{17}$$

L'endomorfismo $\mathbf{W}(t)$, detto *velocità angolare*, risulta antisimmetrico. Si osservi infatti che se $\mathbf{R}(t)$ è una rotazione anche $\mathbf{R}(t)^{-1} = \mathbf{R}(t)^\mathsf{T}$ lo è. Pertanto

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{R}(t)^\mathsf{T} = \mathbf{I}. \tag{18}$$

Derivando rispetto a t si ha

$$\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^\mathsf{T} + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{R}}(t)^\mathsf{T} = \mathbf{O} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}(t) + \mathbf{W}(t)^\mathsf{T} = \mathbf{O} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}(t)^\mathsf{T} = -\mathbf{W}(t). \tag{19}$$

Si noti inoltre che, ponendo

$$\mathbf{a}(t) := \mathbf{x}_\mathsf{B}(t) - \mathbf{x}_\mathsf{A}(t), \tag{20}$$

alla (17) corrisponde

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{a}(t). \tag{21}$$

Per la antisimmetria della velocità angolare si ha

$$\dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{W}(t)^\mathsf{T}\mathbf{a}(t) = -\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{W}(t)\mathbf{a}(t) \tag{22}$$

Ne derivano le due proprietà equivalenti

$$\dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 0, \tag{23}$$

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 0. \tag{24}$$

Dalla prima risulta che la differenza di velocità

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{B}(t) - \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}(t) \tag{25}$$

o è nulla o è ortogonale al vettore differenza (20). Dalla seconda risulta che $\mathbf{W}(t)$ trasforma un qualsiasi vettore in un vettore ad esso ortogonale.

Un *atto di moto rigido* è un atto di moto in cui le velocità sono tali che valga la (17), con $\mathbf{W}(t)$ antisimmetrico.

3 Asse istantaneo di rotazione

Un endomorfismo antisimmetrico $\mathbf{W}(t)$ di uno spazio vettoriale reale di dimensione tre ha un autovalore nullo. Infatti, essendo il polinomio caratteristico di terzo grado esiste almeno un autovalore reale λ. Indicando con $\mathbf{a}_o(t)$ un autovettore unitario corrispondente a λ si ha

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{a}_o(t) = \lambda \mathbf{a}_o(t). \tag{26}$$

Ne deriva che, per la (24),

$$\lambda = \mathbf{W}(t)\mathbf{a}_o(t) \cdot \mathbf{a}_o(t) = 0. \tag{27}$$

Risulta dunque

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{a}_o(t) = \mathbf{o}. \tag{28}$$

Si considerino i punti che all'istante t occupano posizioni sulla retta per $\mathbf{x}_\mathsf{A}(t)$

$$\mathbf{c}_o(h,t) = \mathbf{x}_\mathsf{A}(t) + h\mathbf{a}_o(t). \tag{29}$$

Essi hanno tutti la stessa velocità poichè, per la (28),

$$\dot{\mathbf{c}}_o(h,t) = \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}(t) + \mathbf{W}(t)(\mathbf{c}_o(h,t) - \mathbf{x}_\mathsf{A}(t)) = \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}(t) + h\mathbf{W}(t)\mathbf{a}_o(t) = \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}(t). \tag{30}$$

Tale proprietà vale per qualsiasi retta parallela a $\mathbf{a}_o(t)$. Pertanto ad ogni retta parallela a $\mathbf{a}_o(t)$ corrisponde una velocità, in generale diversa da retta a retta.

Si consideri ora una qualsiasi coppia di punti A e B e il vettore differenza (20). Si osservi che per la differenza delle velocità (25) risulta, per la (28),

$$\dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{a}_o(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{a}_o(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{W}(t)^\mathsf{T}\mathbf{a}_o(t) = -\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{W}(t)\mathbf{a}_o(t) = 0. \tag{31}$$

Pertanto la differenza di velocità, se non è nulla, è ortogonale non solo al vettore $\mathbf{a}(t)$, per la (23), ma anche al vettore $\mathbf{a}_o(t)$. Alla proprietà (31) corrisponde anche un'altra interpretazione. Se la si pone nella forma

$$(\dot{\mathbf{x}}_\mathsf{B}(t) - \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}(t)) \cdot \mathbf{a}_o(t) = 0, \tag{32}$$

ne discende che

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathsf{B}(t) \cdot \mathbf{a}_o(t) = \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}(t) \cdot \mathbf{a}_o(t), \tag{33}$$

La proiezione ortogonale della velocità su $\mathbf{a}_o(t)$ risulta dunque uguale per tutti i punti del corpo. La velocità di un qualsiasi punto si può allora esprimere come somma di una velocità $\mathbf{v}_o(t)$ parallela a $\mathbf{a}_o(t)$, uguale per tutti i punti, e di una velocità ortogonale a $\mathbf{a}_o(t)$. In particolare lungo una retta su un piano per $\mathbf{x}_\mathsf{A}(t)$ ortogonale a $\mathbf{a}_o(t)$

$$\mathbf{c}(h,t) = \mathbf{x}_\mathsf{A}(t) + h\mathbf{a}(t), \qquad \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{a}_o(t) = 0, \tag{34}$$

le velocità si possono esprimere come

$$\dot{\mathbf{c}}(h,t) = \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}(t) + h\mathbf{W}(t)\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}_o(t) + \mathbf{v}_\mathsf{A}^\perp(t) + h\mathbf{W}(t)\mathbf{a}(t), \tag{35}$$

con

$$\mathbf{v}_o(t) := (\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(t) \cdot \mathbf{a}_o(t))\mathbf{a}_o(t), \tag{36}$$

$$\mathbf{v}^{\perp}_{\mathsf{A}}(t) := (\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(t) - \mathbf{v}_o(t)), \tag{37}$$

essendo $\mathbf{v}^{\perp}_{\mathsf{A}}(t)$, come $\mathbf{a}(t)$, un vettore ortogonale a $\mathbf{a}_o(t)$. È sufficiente scegliere $\mathbf{a}(t)$ ortogonale anche a $\mathbf{v}^{\perp}_{\mathsf{A}}(t)$ perché $\mathbf{W}(t)\mathbf{a}(t)$, che per la (24) e la (31) risulterà ortogonale sia ad $\mathbf{a}(t)$ che a $\mathbf{a}_o(t)$, sia parallelo a $\mathbf{v}^{\perp}_{\mathsf{A}}(t)$. Esiste allora un solo valore di h tale che

$$\mathbf{v}^{\perp}_{\mathsf{A}}(t) + h\mathbf{W}(t)\mathbf{a}(t) = \mathbf{o}, \tag{38}$$

individuando così, attraverso la (34), una posizione a cui corrisponde la velocità $\mathbf{v}_o(t)$ parallela a $\mathbf{a}_o(t)$. La retta per tale posizione parallela a $\mathbf{a}_o(t)$ si dice *asse istantaneo di rotazione*.

3.1 Vettore assiale

Poiché $\mathbf{W}(t)$ trasforma un qualsiasi vettore $\mathbf{a}(t)$ in un vettore ortogonale sia ad $\mathbf{a}(t)$ che a $\mathbf{a}_o(t)$, si può pensare di costruire un vettore $\boldsymbol{\omega}(t)$ parallelo a $\mathbf{a}_o(t)$ tale che sia

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}(t) \quad \forall \mathbf{a}(t) \in \mathcal{V}. \tag{39}$$

Tale vettore esiste ed è unico. Infatti ponendo, in una base ortonormale,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{e}_1 + \omega_2(t)\mathbf{e}_2 + \omega_3(t)\mathbf{e}_3, \tag{40}$$

le componenti sono date dalle espressioni seguenti

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}(t)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) &\Rightarrow \quad \omega_3(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\
\mathbf{W}(t)\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) &\Rightarrow \quad \omega_1(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{W}(t)\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) &\Rightarrow \quad \omega_2(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1
\end{aligned} \tag{41}$$

Poiché

$$\mathbf{W}(t)\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{o}, \tag{42}$$

$\boldsymbol{\omega}(t)$ è un autovettore corrispondente a $\lambda = 0$. Esso è pertanto parallelo ad $\mathbf{a}_o(t)$.

Il vettore $\boldsymbol{\omega}(t)$ è detto *vettore assiale* di $\mathbf{W}(t)$. La relazione (39) definisce, per via delle (41), una corrispondenza biunivoca tra endomorfismi antisimmetrici e vettori in uno spazio $\mathcal{V}$ di dimensione tre.

3.2 Centro istantaneo di rotazione

In uno spazio euclideo di dimensione due, in corrispondenza di un atto di moto rigido all'istante t, si dice *centro istantaneo di rotazione* la posizione del punto C tale che $\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{C}}(t) = 0$. Poichè

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{C}}(t) = \mathbf{W}(t)(\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{C}}(t)), \tag{43}$$

se $\mathbf{x}_{\mathsf{C}}(t)$ è il centro istantaneo di rotazione la velocità $\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(t)$ coincide con la differenza tra le velocità ed è dunque ortogonale alla retta congiungente le posizioni $\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)$ e $\mathbf{x}_{\mathsf{C}}(t)$. Questo permette di calcolare il centro di rotazione come la intersezione delle rette ortogonali alle velocità di due punti qualsiasi.

4 Moti rigidi in termini di coordinate

Considerando uno spazio euclideo di dimensione due dotato di un sistema di coordinate cartesiane indotte dalla base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, in un moto rigido la rotazione può essere descritta nel seguente modo

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{e}_1 = \cos\theta(t)\mathbf{e}_1 + \sin\theta(t)\mathbf{e}_2, \tag{44}$$

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{e}_2 = -\sin\theta(t)\mathbf{e}_1 + \cos\theta(t)\mathbf{e}_2. \tag{45}$$

Alla relazione (10) corrisponde la seguente relazione tra le coordinate

$$\begin{pmatrix}\xi_{1\mathsf{B}}(t)\\ \xi_{2\mathsf{B}}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_{1\mathsf{A}}(t)\\ \xi_{2\mathsf{A}}(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos\theta(t) & -\sin\theta(t)\\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\xi_{1\mathsf{B}} - \bar\xi_{1\mathsf{A}}\\ \bar\xi_{2\mathsf{B}} - \bar\xi_{2\mathsf{A}}\end{pmatrix}. \tag{46}$$

Derivando rispetto a t si ha

$$\begin{pmatrix}\dot\xi_{1\mathsf{B}}(t)\\ \dot\xi_{2\mathsf{B}}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot\xi_{1\mathsf{A}}(t)\\ \dot\xi_{2\mathsf{A}}(t)\end{pmatrix} + \dot\theta(t)\begin{pmatrix}-\sin\theta(t) & -\cos\theta(t)\\ \cos\theta(t) & -\sin\theta(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\xi_{1\mathsf{B}} - \bar\xi_{1\mathsf{A}}\\ \bar\xi_{2\mathsf{B}} - \bar\xi_{2\mathsf{A}}\end{pmatrix}. \tag{47}$$

Ricavando dalla (46) la espressione

$$\begin{pmatrix}\bar\xi_{1\mathsf{B}} - \bar\xi_{1\mathsf{A}}\\ \bar\xi_{2\mathsf{B}} - \bar\xi_{2\mathsf{A}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta(t) & \sin\theta(t)\\ -\sin\theta(t) & \cos\theta(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{1\mathsf{B}}(t) - \xi_{1\mathsf{A}}(t)\\ \xi_{2\mathsf{B}}(t) - \xi_{2\mathsf{A}}(t)\end{pmatrix} \tag{48}$$

e sostituendola nella (47) si ottiene

$$\begin{pmatrix}\dot\xi_{1\mathsf{B}}(t)\\ \dot\xi_{2\mathsf{B}}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot\xi_{1\mathsf{A}}(t)\\ \dot\xi_{2\mathsf{A}}(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -\dot\theta(t)\\ \dot\theta(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{1\mathsf{B}}(t) - \xi_{1\mathsf{A}}(t)\\ \xi_{2\mathsf{B}}(t) - \xi_{2\mathsf{A}}(t)\end{pmatrix}. \tag{49}$$

Questa è la relazione tra le componenti delle velocità corrispondente alla (17). La matrice che compare nella (49) è dunque la matrice di $\mathbf{W}(t)$.

In generale, in uno spazio euclideo di dimensione tre dotato di un sistema di coordinate cartesiane indotte dalla base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, alla relazione (17) corrisponde la seguente relazione tra le componenti

$$\begin{pmatrix}\dot\xi_{1\mathsf{B}}(t)\\ \dot\xi_{2\mathsf{B}}(t)\\ \dot\xi_{3\mathsf{B}}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot\xi_{1\mathsf{A}}(t)\\ \dot\xi_{2\mathsf{A}}(t)\\ \dot\xi_{3\mathsf{A}}(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t)\\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t)\\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{1\mathsf{B}}(t) - \xi_{1\mathsf{A}}(t)\\ \xi_{2\mathsf{B}}(t) - \xi_{2\mathsf{A}}(t)\\ \xi_{3\mathsf{B}}(t) - \xi_{3\mathsf{A}}(t)\end{pmatrix}. \tag{50}$$

La matrice di $\mathbf{W}$ è antisimmetrica poiché

$$\mathbf{W}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{W} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}\mathbf{e}_j. \tag{51}$$

5 Moti affini

Un moto si dice *affine* se, comunque si fissi t_0, la descrizione del moto in termini di deformazioni (4) è tale che, per ogni coppia di punti A e B, risulta ad ogni istante t

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}, t) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}, t) + \mathbf{F}(t)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}), \tag{52}$$

essendo $\mathbf{F}(t)$ un endomorfismo tale che $\det \mathbf{F}(t) > 0$. Un *moto affine* risulta pertanto definito dal moto di un punto qualsiasi del corpo, ad esempio A, e da $\mathbf{F}$. La espressione corrispondente per le velocità è

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}, t) = \dot{\boldsymbol{\phi}}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}, t) + \dot{\mathbf{F}}(t)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}). \tag{53}$$

Sostituendo alla (52) la espressione in termini di moto di ciascun punto

$$\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) = \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t) + \mathbf{F}(t)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}), \tag{54}$$

si ottiene per le velocità

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(t) + \dot{\mathbf{F}}(t)(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t_0) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t_0)). \tag{55}$$

Essendo dalla (54)

$$\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t_0) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t_0) = \mathbf{F}(t)^{-1}(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)), \tag{56}$$

risulta

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(t) + \dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)^{-1}(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)). \tag{57}$$

Ponendo

$$\mathbf{G}(t) := \dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)^{-1}, \tag{58}$$

la (57) si può scrivere

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(t) + \mathbf{G}(t)(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)). \tag{59}$$

Considerando la deformazione da un istante t fissato ad un qualsiasi istante $t + \tau$

$$\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t), t+\tau) = \boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t), t+\tau) + \mathbf{F}_t(t+\tau)(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)), \tag{60}$$

si ha la seguente espressione per le velocità all'istante t è

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_t(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t), t) = \dot{\boldsymbol{\phi}}_t(\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t), t) + \dot{\mathbf{F}}_t(t)(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)). \tag{61}$$

Dal confronto con la (59) risulta

$$\mathbf{G}(t) = \dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)^{-1} = \dot{\mathbf{F}}_t(t). \tag{62}$$

Questa espressione permette di dare una utile caratterizzazione di $\mathbf{G}$. Dalla decomposizione polare del gradiente della deformazione

$$\mathbf{F}_t(t+\tau) = \mathbf{R}_t(t+\tau)\mathbf{U}_t(t+\tau) \tag{63}$$

si ottiene, derivando in $\tau = 0$,

$$\mathbf{G}(t) = \dot{\mathbf{F}}_t(t) = \dot{\mathbf{R}}_t(t)\mathbf{U}_t(t) + \mathbf{R}_t(t)\dot{\mathbf{U}}_t(t) = \dot{\mathbf{R}}_t(t) + \dot{\mathbf{U}}_t(t), \tag{64}$$

poiché $\mathbf{F}_t(t) = \mathbf{I}$ implica $\mathbf{R}_t(t) = \mathbf{I}$ e $\mathbf{U}_t(t) = \mathbf{I}$. Si noti che $\dot{\mathbf{R}}_t(t)$ è antisimmetrico e $\dot{\mathbf{U}}_t(t)$ è simmetrico. Infatti

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_t(t+\tau)^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_t(t+\tau) = \mathbf{I} \quad &\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{R}}_t(t+\tau)^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_t(t+\tau) + \mathbf{R}_t(t+\tau)^{\mathsf{T}}\dot{\mathbf{R}}_t(t+\tau) = \mathbf{O} \\
&\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{R}}_t(t)^{\mathsf{T}} + \dot{\mathbf{R}}_t(t) = \mathbf{O}, \qquad (65) \\
\dot{\mathbf{U}}_t(t+\tau)^{\mathsf{T}} = \dot{\mathbf{U}}_t(t+\tau) \quad &\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{U}}_t(t)^{\mathsf{T}} = \dot{\mathbf{U}}_t(t). \qquad (66)
\end{aligned}$$

Esprimendo $\mathbf{G}(t)$ come somma della parte simmetrica e della parte antisimmetrica

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{D}(t) + \mathbf{W}(t), \tag{67}$$

con

$$\mathbf{D}(t) := \frac{1}{2}(\mathbf{G}(t) + \mathbf{G}(t)^{\mathsf{T}}), \quad \mathbf{W}(t) := \frac{1}{2}(\mathbf{G}(t) - \mathbf{G}(t)^{\mathsf{T}}) \tag{68}$$

risulta dunque

$$\mathbf{D}(t) = \dot{\mathbf{U}}_t(0), \quad \mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{R}}_t(0). \tag{69}$$

Per questa ragione $\mathbf{D}(t)$ e $\mathbf{W}(t)$ sono dette rispettivamente *velocità di dilatazione* e *velocità angolare*.

Un *atto di moto affine* è un atto di moto in cui le velocità sono tali che valga la (59), essendo $\mathbf{G}(t)$ una qualsiasi applicazione lineare.

6 Gradiente della velocità

Nel caso di un generico moto ad ogni istante t è definita la deformazione

$$\boldsymbol{\phi}(\cdot, t) : \bar{\mathcal{R}} \mapsto \mathcal{E}. \tag{70}$$

Si consideri una retta

$$\bar{\mathbf{c}}(h) = \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} + h\bar{\mathbf{a}} \tag{71}$$

e per ogni t la curva $\mathbf{c}(\cdot, t)$ tale che

$$\mathbf{c}(h, t) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{c}}(h), t). \tag{72}$$

Il vettore tangente in $\mathbf{c}(0, t)$ è

$$\mathbf{a}(t) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(\mathbf{c}(h, t) - \mathbf{c}(0, t)\big). \tag{73}$$

Ad ogni istante risulta pertanto definito, per ciascun punto A, il gradiente di $\boldsymbol{\phi}(\cdot, t)$, come l'applicazione lineare

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}, t) : \bar{\mathbf{a}} \mapsto \mathbf{a}(t), \tag{74}$$

che trasforma i vettori tangenti alle curve per $\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}$ nei vettori tangenti alle curve corrispondenti per $\mathbf{x}_\mathsf{A}(t) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}, t)$.

All'istante t la velocità dei punti del corpo è descritta dalla funzione

$$\mathbf{v}_t : \mathbf{x}_\mathsf{A}(t) \mapsto \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}(t). \tag{75}$$

che ha come dominio la forma del corpo all'istante t ed è detta *campo spaziale della velocità*. Il gradiente di tale campo vettoriale [v. APPENDICE 2] è quella applicazione lineare $\nabla\mathbf{v}_t$ tale che

$$\nabla\mathbf{v}_t\mathbf{a}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\mathbf{v}_t(\mathbf{c}(h,t)) - \mathbf{v}_t(\mathbf{c}(0,t))\big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\dot{\mathbf{c}}(h,t) - \dot{\mathbf{c}}(0,t)\big). \tag{76}$$

Poiché dalla (73) si ha

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\dot{\mathbf{c}}(h,t) - \dot{\mathbf{c}}(0,t)\big), \tag{77}$$

dalla (76) si ottiene

$$\nabla\mathbf{v}_t\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{a}}(t). \tag{78}$$

Dalla (74) si ha anche

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\big(\mathbf{a}(t+\tau) - \mathbf{a}(t)\big) = \dot{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}, t)\bar{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}, t)\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}, t)^{-1}\mathbf{a}(t). \tag{79}$$

Sostituendo questa nella (78) risulta, omettendo gli argomenti,

$$\nabla\mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}. \tag{80}$$

Considerando la deformazione da un istante t fissato ad un qualsiasi istante $t+\tau$

$$\boldsymbol{\phi}_t(\cdot, t+\tau) : \mathbf{x}_\mathsf{A}(t) \mapsto \mathbf{x}_\mathsf{A}(t+\tau), \tag{81}$$

risulta definito, per ciascun punto A, il gradiente di $\boldsymbol{\phi}_t(\cdot, t+\tau)$, come l'applicazione lineare

$$\mathbf{F}_t(t+\tau) : \mathbf{a}(t) \mapsto \mathbf{a}(t+\tau), \tag{82}$$

che trasforma i vettori tangenti alle curve per $\mathbf{x}_\mathsf{A}(t)$ nei vettori tangenti alle curve corrispondenti per $\mathbf{x}_\mathsf{A}(t+\tau)$. Al posto della (79) si ottiene

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\big(\mathbf{a}(t+\tau) - \mathbf{a}(t)\big) = \dot{\mathbf{F}}_t(\mathbf{x}_\mathsf{A}(t), t)\mathbf{a}(t) \tag{83}$$

risultando dunque

$$\nabla\mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{F}}_t. \tag{84}$$

7 Descrizione di atti di moto affini

Si può illustrare il significato del gradiente della velocità nel seguente modo. In uno spazio di dimensione due si consideri ad un istante t un corpo a forma di quadrato. Fissata una base ortonormale adattata ai lati del quadrato, si indichi la matrice del gradiente della velocità con

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \tag{85}$$

Il campo velocità è dato dalla espressione (59). Per un intervallo τ abbastanza piccolo il corpo assume la forma descritta dalla espressione

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t+\tau) &= \mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) + \dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}(t)\tau + \mathbf{o}(\tau) \\ &= \mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) + \big(\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}(t) + \mathbf{G}(t)(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{O}}(t))\big)\tau + \mathbf{o}(\tau) \end{aligned} \tag{86}$$

Assumendo nulla la velocità del centro $\mathbf{x}_{\mathsf{O}}(t)$ si ha

$$\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t+\tau) = \mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) + \mathbf{G}(t)(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{O}}(t))\tau + \mathbf{o}(\tau). \tag{87}$$

Nelle figure che seguono sono riportate le forme assunte dal quadrato corrispondenti alle seguenti matrici di $\mathbf{G}(t)$, disposte nello stesso ordine

Figura 1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Figura 2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Figura 3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

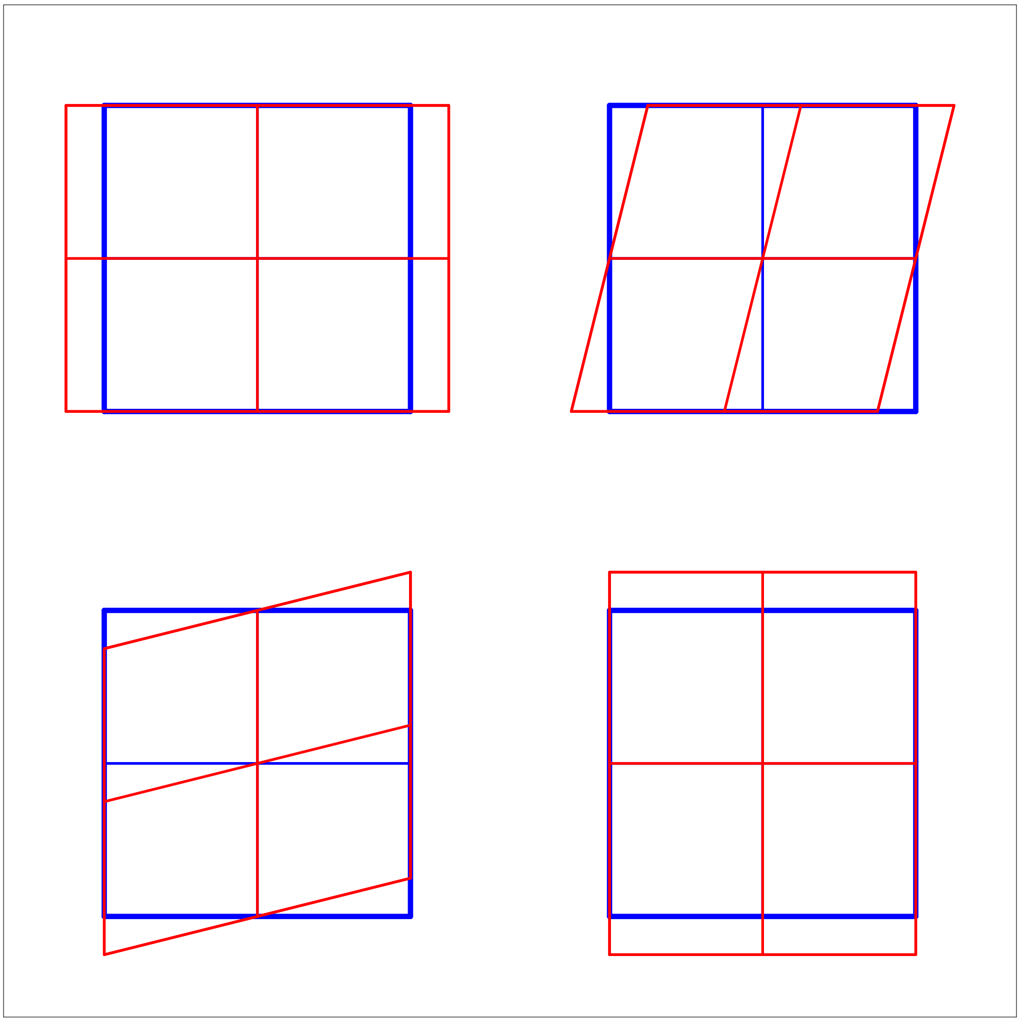

Figura 1: Gradiente del campo di velocità

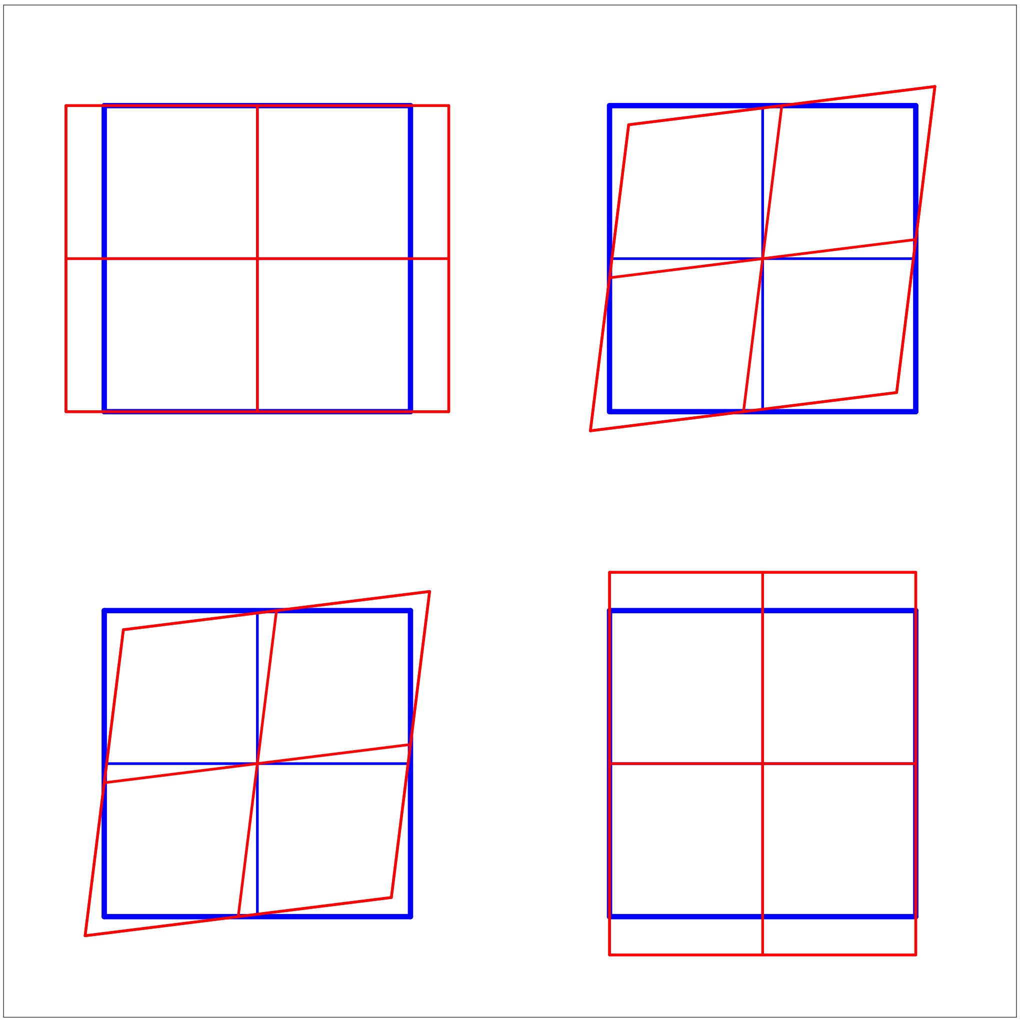

Figura 2: Gradiente del campo di velocità (parte simmetrica)

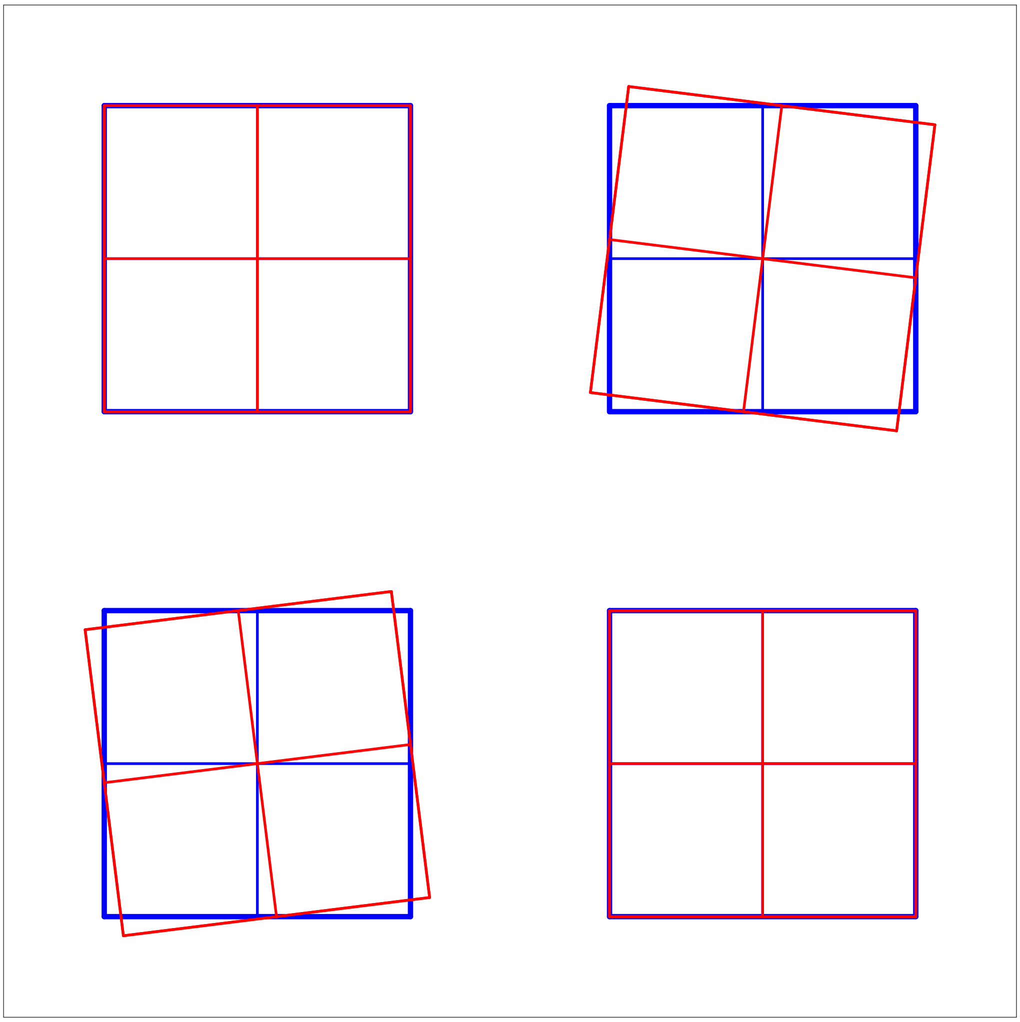

Figura 3: Gradiente del campo di velocità (parte antisimmetrica)