

# Potenza, forze, momenti

Mais il y a aussi, au moins depuis d'Alambert, une deuxième voie possible, celle des puissances (ou travaux) virtuelles. Contrairement à ce que l'on croit parfois, cette deuxième manière est tout aussi naturelle que la première et elle ne fait que traduire une expérience physique très commune. Si on veut savoir si une valise est lourde, on essaie de la soulever un peu; pour apprécier la tension d'une courroie de transmission, on l'écarte quelque peu de sa position stable; et c'est en essayant de pousser une voiture que l'on se rendra compte des frottements tant externes qu'internes s'opposant au mouvement.

[...] L'idée essentielle de cette deuxième voie est celle de "dualité". Aussi cette voie est-elle non seulement très proche de l'expérience la plus commune comme nous l'avons déjà noté, mais aussi très souple; selon que l'on choisira un espace vectoriel plus ou moins "vaste", on aura une description des efforts plus ou moins fine.

[Germain, P., La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. Première partie: Théorie du second gradient, *Journal de Mécanique*, 12 (1973), pp. 235-274.]

## Indice

<b>1</b>	<b>Potenza</b>	<b>2</b>
1.1	Espressione della potenza attraverso una parametrizzazione . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Potenza in un atto di moto rigido</b>	<b>3</b>
2.1	Vettore momento e parte antisimmetrica del tensore momento . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Potenza in un atto di moto affine</b>	<b>5</b>
3.1	Momento rispetto ad un altro polo . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Sistemi di forze equipotenti</b>	<b>7</b>
4.1	Esempio di sistema di forze su un rettangolo (a) . . . . .	7
4.2	Esempio di sistema di forze su un rettangolo (b) . . . . .	8
4.3	Esempio di sistema di forze su un rettangolo (c) . . . . .	8
4.4	Esempio di sistema di forze su un triangolo . . . . .	10
4.5	Esempio di sistema di forze su un parallelepipedo . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Tensore momento come descrittore di classi di equipotenza</b>	<b>12</b>
5.1	Tensore momento antisimmetrico . . . . .	13
5.2	Tensore momento simmetrico . . . . .	13

## 1 Potenza

Si consideri un corpo, i cui punti siano identificati dagli elementi dell'insieme  $\mathcal{B} := \{A, B\}$ , e una sua configurazione

$$\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}. \quad (1)$$

Il modo più semplice per descrivere la *interazione meccanica* del corpo con l'ambiente esterno consiste nell'assegnare una funzione lineare  $\mathcal{W}^{(ext)}$ , detta *potenza esterna*, che, in corrispondenza della configurazione  $\chi$ , trasforma un qualsiasi atto di moto in uno scalare.

La scelta dello spazio degli atti di moto da prendere in considerazione nella valutazione della potenza (*atti di moto test o atti di moto virtuali*), svolge un ruolo cruciale nella definizione di un *modello* di corpo.

Se in un atto di moto le velocità si indicano con

$$\mathbf{w}_A, \mathbf{w}_B \quad (2)$$

la potenza ammette un'unica rappresentazione nella forma

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_A, \mathbf{w}_B) = \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{w}_A + \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{w}_B. \quad (3)$$

I vettori  $\mathbf{f}_A, \mathbf{f}_B$  si dicono *forze esterne* applicate rispettivamente ai punti A, B.

Il caso che ha qui maggiore interesse è quello in cui  $\mathcal{B}$  e  $\chi$  sono tali che l'insieme  $\text{im } \chi$  (la *forma* del corpo) è un sottoinsieme  $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$  chiusura di un sottoinsieme aperto. In corrispondenza di un atto di moto la velocità dei punti del corpo può essere descritta dalla funzione

$$\mathbf{w} : \mathbf{x}_A \mapsto \mathbf{w}_A, \quad (4)$$

che ha come dominio  $\mathcal{R}$ . La *potenza esterna* ha in generale la seguente rappresentazione

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} dA. \quad (5)$$

I campi vettoriali  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{t}$ , rispettivamente su  $\mathcal{R}$  e  $\partial\mathcal{R}$ , si dicono *distribuzione di forza di volume* e *distribuzione di forza di contatto (o di bordo)*.

### 1.1 Espressione della potenza attraverso una parametrizzazione

Si consideri ad esempio, in uno spazio euclideo di dimensione 2, un corpo la cui forma  $\mathcal{R}$  sia un rettangolo con lati di lunghezza  $\ell_1$  e  $\ell_2$ . Indicando con  $\mathbf{x}_O$  il centro del rettangolo e scegliendo i vettori della base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  paralleli ai lati, le posizioni dei punti del corpo possono essere descritte dalla parametrizzazione di  $\mathcal{R}$

$$\mathbf{x} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}, \quad \mathcal{D} = \left[-\frac{\ell_1}{2}, \frac{\ell_1}{2}\right] \times \left[-\frac{\ell_2}{2}, \frac{\ell_2}{2}\right], \quad (6)$$

definita dalla espressione

$$\mathbf{x}(\zeta_1, \zeta_2) = \mathbf{x}_O + \zeta_1 \mathbf{e}_1 + \zeta_2 \mathbf{e}_2. \quad (7)$$

Le posizioni dei punti sul bordo possono essere descritte dalla parametrizzazione  $\check{\mathbf{x}}$  di  $\partial\mathcal{R}$ , definita per ciascun lato dalle seguenti espressioni

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{x}}(\zeta) &= \mathbf{x}_O + \frac{\ell_1}{2}\mathbf{e}_1 + \zeta\mathbf{e}_2, & \check{\mathbf{x}}(\zeta) &= \mathbf{x}_O - \frac{\ell_1}{2}\mathbf{e}_1 + \zeta\mathbf{e}_2, \\ \check{\mathbf{x}}(\zeta) &= \mathbf{x}_O + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta\mathbf{e}_1, & \check{\mathbf{x}}(\zeta) &= \mathbf{x}_O - \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta\mathbf{e}_1.\end{aligned}\tag{8}$$

Definendo le funzioni

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}} &:= \mathbf{w} \circ \mathbf{x}, & \hat{\mathbf{b}} &:= \mathbf{b} \circ \mathbf{x} \\ \check{\mathbf{w}} &:= \mathbf{w} \circ \check{\mathbf{x}}, & \check{\mathbf{t}} &:= \mathbf{t} \circ \check{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{9}$$

la (5) diventa

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) &= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, dA \\ &= \int_{\mathcal{D}} \hat{\mathbf{b}}(\zeta_1, \zeta_2) \cdot \hat{\mathbf{w}}(\zeta_1, \zeta_2) \, d\zeta_1 d\zeta_2 + \int_{\partial\mathcal{D}} \check{\mathbf{t}}(\zeta) \cdot \check{\mathbf{w}} \, d\zeta \\ &= \int_{-\ell_2/2}^{\ell_2/2} \int_{-\ell_1/2}^{\ell_1/2} \hat{\mathbf{b}}(\zeta_1, \zeta_2) \cdot \hat{\mathbf{w}}(\zeta_1, \zeta_2) \, d\zeta_1 d\zeta_2 + \sum \int_{-\ell_i/2}^{\ell_i/2} \check{\mathbf{t}}(\zeta) \cdot \check{\mathbf{w}}(\zeta) \, d\zeta,\end{aligned}\tag{10}$$

essendo la sommatoria estesa a tutti i lati del rettangolo.

## 2 Potenza in un atto di moto rigido

In un atto di moto rigido le velocità dei punti del corpo  $\mathcal{B}$  sono tali che

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \mathbf{W}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O), \\ \mathbf{w}_B &= \mathbf{w}_O + \mathbf{W}(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O).\end{aligned}\tag{11}$$

Pertanto la potenza esterna (3) diventa

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_A, \mathbf{w}_B) &= \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{w}_A + \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{w}_B \\ &= (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{w}_O + \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) + \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \\ &= (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{w}_O + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{W} + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{W} \\ &= (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{w}_O + ((\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{W}.\end{aligned}\tag{12}$$

Usando il vettore assiale di  $\mathbf{W}$  le (11) diventano

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O), \\ \mathbf{w}_B &= \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O),\end{aligned}\tag{13}$$

da cui deriva la seguente espressione della potenza

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_A, \mathbf{w}_B) = (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{w}_O + ((\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \times \mathbf{f}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \times \mathbf{f}_B) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (14)$$

Il termine che moltiplica  $\mathbf{w}_O$

$$\mathbf{f} := \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B \quad (15)$$

si chiama *forza risultante*, il termine che moltiplica  $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{m}_{\mathbf{x}_O} := (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \times \mathbf{f}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \times \mathbf{f}_B \quad (16)$$

si chiama *vettore momento risultante rispetto a  $\mathbf{x}_O$* . Il termine che moltiplica  $\mathbf{W}$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} := (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_B \quad (17)$$

si chiama *tensore momento risultante rispetto a  $\mathbf{x}_O$* .

Si noti che la (12), essendo  $\mathbf{W}$  antisimmetrico, si può anche scrivere

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_A, \mathbf{w}_B) = (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{w}_O + \text{skw}((\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{W}. \quad (18)$$

Per un corpo  $\mathcal{B}$  di forma  $\mathcal{R}$ , in un atto di moto rigido le velocità possono essere descritte dalla funzione

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_O + \mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}. \quad (19)$$

La potenza esterna (5) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) &= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, dA \\ &= \left( \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \, dA \right) \cdot \mathbf{w}_O + \left( \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{t} \, dA \right) \cdot \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (20)$$

In questo caso la forza risultante e il tensore momento risultante sono

$$\mathbf{f} := \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \, dA, \quad (21)$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} := \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{t} \, dA, \quad (22)$$

e la (20) si scrive

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_O + \mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} \cdot \mathbf{W}. \quad (23)$$

In alternativa, utilizzando il vettore assiale di  $\mathbf{W}$  si ottiene il vettore momento risultante

$$\mathbf{m}_{\mathbf{x}_O} := \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \times \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \times \mathbf{t} \, dA. \quad (24)$$

Corrispondentemente la (20) si scrive

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_O + \mathbf{m}_{\mathbf{x}_O} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (25)$$

## 2.1 Vettore momento e parte antisimmetrica del tensore momento

Si osservi che il *vettore momento* è il vettore assiale di  $2 \operatorname{skw} \mathbf{M}$ . Infatti per la uguaglianza delle (23) e (25) deve essere

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (26)$$

dove  $\boldsymbol{\omega}$  è il vettore assiale di  $\mathbf{W}$ . Poiché

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \mathbf{W} &= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (M_{32} - M_{23})\omega_1 + (M_{13} - M_{31})\omega_2 + (M_{21} - M_{12})\omega_3, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{skw} \mathbf{M} \cdot \mathbf{W} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & M_{12} - M_{21} & M_{13} - M_{31} \\ M_{21} - M_{12} & 0 & M_{23} - M_{32} \\ M_{31} - M_{13} & M_{32} - M_{23} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (M_{32} - M_{23})\omega_1 + (M_{13} - M_{31})\omega_2 + (M_{21} - M_{12})\omega_3, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} &= (m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2 + m_3 \mathbf{e}_3) \cdot (\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3) \\ &= m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3, \end{aligned} \quad (29)$$

le componenti di  $\mathbf{m}$  risultano tali che

$$\begin{aligned} m_1 &= M_{32} - M_{23}, \\ m_2 &= M_{13} - M_{31}, \\ m_3 &= M_{21} - M_{12}, \end{aligned} \quad (30)$$

e dunque uguali rispettivamente agli elementi (3, 2), (1, 3) e (2, 1) della matrice di  $\mathbf{M} - \mathbf{M}^\top$ .

## 3 Potenza in un atto di moto affine

In un atto di moto affine le velocità dei punti del corpo  $\mathcal{B}$  sono tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \mathbf{G}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O), \\ \mathbf{w}_B &= \mathbf{w}_O + \mathbf{G}(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O). \end{aligned} \quad (31)$$

Pertanto la potenza esterna diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_A, \mathbf{w}_B) &= \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{w}_A + \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{w}_B \\ &= (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{w}_O + ((\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{G} \\ &= (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{w}_O + \operatorname{skw} ((\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{W} \\ &\quad + \operatorname{sym} ((\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (32)$$

In questo caso si dice *tensore momento risultante* il termine che moltiplica  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} := (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_B. \quad (33)$$

Distinguendo il termine che moltiplica  $\mathbf{W}$ , la parte antisimmetrica di  $\mathbf{G}$ , dal termine che moltiplica  $\mathbf{D}$ , la parte simmetrica di  $\mathbf{G}$ , si dirà il primo *momento antisimmetrico* risultante e il secondo *momento simmetrico* risultante, rispetto a  $\mathbf{x}_O$ .

Per un corpo  $\mathcal{B}$  di forma  $\mathcal{R}$ , in un atto di moto affine le velocità possono essere descritte dalla funzione

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_O + \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}. \quad (34)$$

La potenza esterna (5) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) &= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, dA \\ &= \left( \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \, dA \right) \cdot \mathbf{w}_O + \left( \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{t} \, dA \right) \cdot \mathbf{G}. \end{aligned} \quad (35)$$

La forza risultante e il tensore momento risultante sono

$$\mathbf{f} := \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \, dA, \quad (36)$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} := \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{t} \, dA \quad (37)$$

e la (35) si scrive

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_O + \mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} \cdot \mathbf{G}. \quad (38)$$

### 3.1 Momento rispetto ad un altro polo

Si consideri una diversa descrizione dell'atto di moto (34)

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_P + \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}. \quad (39)$$

Essendo

$$\mathbf{w}_P = \mathbf{w}_O + \mathbf{G}(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad (40)$$

risulta

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_O + \mathbf{G}(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) + \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) = \mathbf{w}_O + \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_O). \quad (41)$$

Ne deriva, attraverso la (35), la seguente relazione tra il tensore momento rispetto a  $\mathbf{x}_P$  e il tensore momento rispetto a  $\mathbf{x}_O$

$$\begin{aligned} &(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \otimes \left( \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \, dA \right) + \left( \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \otimes \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \otimes \mathbf{t} \, dA \right) \\ &= \left( \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{t} \, dA \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Indicando con  $\mathbf{f}$  la forza risultante, con  $\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O}$  il tensore momento risultante rispetto a  $\mathbf{x}_O$  e con  $\mathbf{M}_{\mathbf{x}_P}$  il tensore momento risultante rispetto a  $\mathbf{x}_P$ , dalla espressione precedente si ha

$$(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f} + \mathbf{M}_{\mathbf{x}_P} = \mathbf{M}_{\mathbf{x}_O}. \quad (43)$$

Si noti che se la forza risultante è nulla il tensore momento non dipende dal polo.

## 4 Sistemi di forze equipotenti

Si dicono *equipotenti* quei sistemi di forze che spendono uguale potenza per qualunque atto di moto. Sono dunque equipotenti rispetto ad atti di moto rigidi quei sistemi di forze che hanno la stessa forza risultante e lo stesso tensore momento (antisimmetrico) risultante. Sono invece equipotenti rispetto ad atti di moto affini quei sistemi di forze che hanno la stessa forza risultante e lo stesso tensore momento (sia antisimmetrico che simmetrico) risultante. Si noti che due sistemi di forze che abbiano la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo hanno, per la (43), lo stesso momento risultante rispetto a qualsiasi polo.

### 4.1 Esempio di sistema di forze su un rettangolo (a)

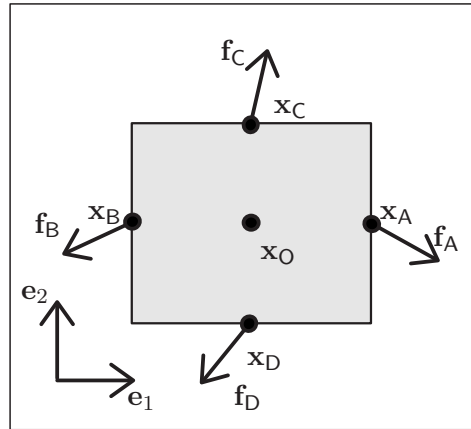


Figura 1: Corpo soggetto a forze applicate in alcuni punti

Si consideri un corpo a forma di rettangolo, con forze applicate al centro di ciascun lato, di lunghezza  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , come in fig. 1. La forza risultante è

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B + \mathbf{f}_C + \mathbf{f}_D, \quad (44)$$

il tensore momento risultante è

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_B + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_C + (\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{f}_D \\ &= \ell_1 \mathbf{e}_1 \otimes \frac{1}{2}(\mathbf{f}_A - \mathbf{f}_B) + \ell_2 \mathbf{e}_2 \otimes \frac{1}{2}(\mathbf{f}_C - \mathbf{f}_D). \end{aligned} \quad (45)$$

## 4.2 Esempio di sistema di forze su un rettangolo (b)

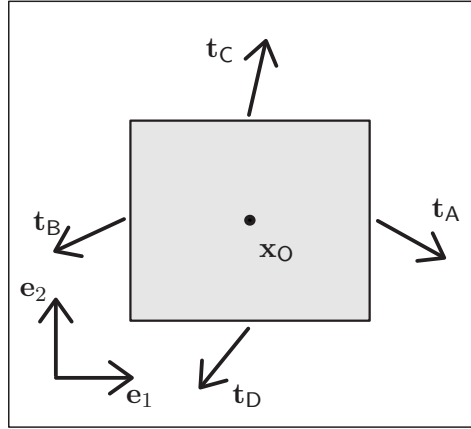


Figura 2: Corpo soggetto a una distribuzione di forza applicata sul bordo

Si consideri il sistema di forze in fig. 2 costituito da una distribuzione di forza sul bordo, uniforme su ciascun lato. Utilizzando le (8) si ottiene per il tensore momento risultante

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{x_O} &= \int_{-\frac{\ell_2}{2}}^{\frac{\ell_2}{2}} \left( \frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 + \zeta_2 \mathbf{e}_2 \right) \otimes \mathbf{t}_A d\zeta_2 + \int_{-\frac{\ell_2}{2}}^{\frac{\ell_2}{2}} \left( -\frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 + \zeta_2 \mathbf{e}_2 \right) \otimes \mathbf{t}_B d\zeta_2 \\
 &\quad + \int_{-\frac{\ell_1}{2}}^{\frac{\ell_1}{2}} \left( \frac{\ell_2}{2} \mathbf{e}_2 + \zeta_1 \mathbf{e}_1 \right) \otimes \mathbf{t}_C d\zeta_1 + \int_{-\frac{\ell_1}{2}}^{\frac{\ell_1}{2}} \left( -\frac{\ell_2}{2} \mathbf{e}_2 + \zeta_1 \mathbf{e}_1 \right) \otimes \mathbf{t}_D d\zeta_1 \\
 &= \frac{1}{2} \ell_1 \ell_2 \left( \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{t}_A - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{t}_B + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{t}_C - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{t}_D \right) \\
 &= \ell_1 \ell_2 \left( \mathbf{e}_1 \otimes \frac{1}{2} (\mathbf{t}_A - \mathbf{t}_B) + \mathbf{e}_2 \otimes \frac{1}{2} (\mathbf{t}_C - \mathbf{t}_D) \right).
 \end{aligned} \tag{46}$$

Per la forza risultante si ha

$$\mathbf{f} = \ell_2 (\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_B) + \ell_1 (\mathbf{t}_C + \mathbf{t}_D). \tag{47}$$

Scegliendo

$$\mathbf{t}_A = \frac{\mathbf{f}_A}{\ell_2}, \quad \mathbf{t}_B = \frac{\mathbf{f}_B}{\ell_2}, \quad \mathbf{t}_C = \frac{\mathbf{f}_C}{\ell_1}, \quad \mathbf{t}_D = \frac{\mathbf{f}_D}{\ell_1}, \tag{48}$$

il sistema di forze esaminato risulta nella stessa classe di equipotenza del precedente.

## 4.3 Esempio di sistema di forze su un rettangolo (c)

Si consideri il sistema di forze in fig. 3 costituito da una distribuzione di forza sul bordo costante su ciascuno dei lati e opposta su lati opposti. La espressione del tensore momento è

$$\mathbf{M}_{x_O} = \ell_1 \ell_2 \left( \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{t}_2 \right). \tag{49}$$



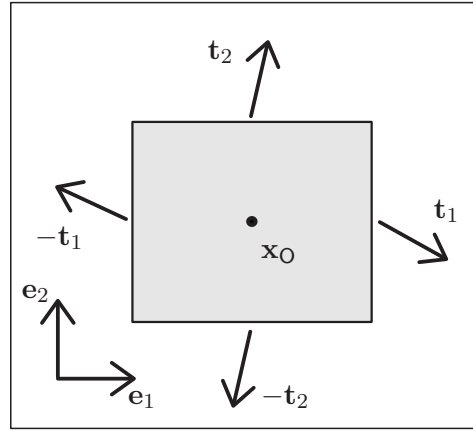


Figura 3: Corpo soggetto a una distribuzione di forza applicata sul bordo, con valori opposti su lati opposti

Assumendo

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{t}_A - \mathbf{t}_B), \quad \mathbf{t}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{t}_C - \mathbf{t}_D), \quad (50)$$

il tensore momento risulta uguale al caso descritto in fig. 2.

Si noti che dalla (49) deriva la seguente proprietà

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{x_0} \mathbf{e}_1 &= l_1 l_2 \mathbf{t}_1, \\ \mathbf{M}_{x_0} \mathbf{e}_2 &= l_1 l_2 \mathbf{t}_2. \end{aligned} \quad (51)$$

Corrispondentemente per la matrice del tensore momento si ha

$$[\mathbf{M}_{x_0}] = l_1 l_2 \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}, \quad (52)$$

avendo posto

$$\mathbf{t}_1 = t_{11} \mathbf{e}_1 + t_{21} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{t}_2 = t_{12} \mathbf{e}_1 + t_{22} \mathbf{e}_2. \quad (53)$$

Ponendo inoltre

$$\mathbf{s}_1 := \frac{1}{l_1}(\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_B), \quad \mathbf{s}_2 := \frac{1}{l_2}(\mathbf{t}_C + \mathbf{t}_D), \quad (54)$$

si ha

$$\mathbf{f} = l_1 l_2 (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2). \quad (55)$$

Si può allora definire la distribuzione uniforme di forza di volume

$$\mathbf{p} := \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \quad (56)$$

che risulta tale da avere risultante  $\mathbf{f}$  e momento nullo. Infatti

$$\int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{p} dV = \int_{-\frac{\ell_2}{2}}^{\frac{\ell_2}{2}} \int_{-\frac{\ell_1}{2}}^{\frac{\ell_1}{2}} (\zeta_1 \mathbf{e}_1 + \zeta_2 \mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) d\zeta_1 d\zeta_2 = \mathbf{O}. \quad (57)$$

Pertanto un sistema di forze costituito da una distribuzione di volume uniforme  $\mathbf{p}$  data dalla (54) e da una distribuzione sul bordo descritta da  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$  tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \frac{1}{l_1 l_2} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{t}_2 &= \frac{1}{l_1 l_2} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (58)$$

appartiene alla stessa classe di equipotenza del sistema di forze in fig. 2.

#### 4.4 Esempio di sistema di forze su un triangolo

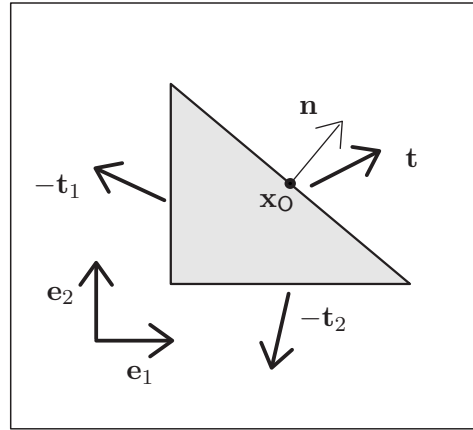


Figura 4: Corpo soggetto a una distribuzione di forza applicata sul bordo

Si consideri il sistema di forze in fig. 4 costituito da una distribuzione di forza sul bordo di un triangolo rettangolo, uniforme su ciascun lato, di lunghezza  $l_1$  e  $l_2$ , e sulla ipotenusa.

La distribuzione  $\mathbf{t}$  sia tale che la forza risultante sia nulla:

$$l\mathbf{t} - l_2\mathbf{t}_1 - l_1\mathbf{t}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t} = \frac{1}{l}(l_2\mathbf{t}_1 + l_1\mathbf{t}_2), \quad (59)$$

con  $l := \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ . Utilizzando la parametrizzazione della ipotenusa

$$\mathbf{c}(h) = \mathbf{x}_O + \frac{h}{l}(l_1\mathbf{e}_1 - l_2\mathbf{e}_2). \quad (60)$$

il tensore momento assume la espressione

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} &= -\frac{l_1 l_2}{2} \mathbf{e}_1 \otimes (-\mathbf{t}_1) - \frac{l_1 l_2}{2} \mathbf{e}_2 \otimes (-\mathbf{t}_2) + \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{h}{\ell} (l_1 \mathbf{e}_1 - l_2 \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{t} dh \\ &= \frac{l_1 l_2}{2} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{t}_2). \end{aligned} \quad (61)$$

Si osservi che risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \frac{2}{\ell_1 \ell_2} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{t}_2 &= \frac{2}{\ell_1 \ell_2} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{t} &= \frac{2}{\ell_1 \ell_2} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (62)$$

essendo

$$\mathbf{n} := \frac{1}{\ell} (\ell_2 \mathbf{e}_1 + \ell_1 \mathbf{e}_2) \quad (63)$$

la normale esterna unitaria alla ipotenusa.

#### 4.5 Esempio di sistema di forze su un parallelepipedo

Si consideri un parallelepipedo di spigoli  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  con forze  $\mathbf{f}_1, -\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, -\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, -\mathbf{f}_3$  applicate al centro delle facce e opposte su facce opposte. La forza risultante è nulla e il tensore momento risultante è

$$\mathbf{M} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{f}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{f}_2 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{f}_3. \quad (64)$$

Indicando con  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  i vettori normali unitari alle facce del parallelepipedo, si esprima ad esempio  $\mathbf{n}_1$  come combinazione lineare dei vettori  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$

$$\mathbf{n}_1 = \nu_{11} \mathbf{a}_1 + \nu_{21} \mathbf{a}_2 + \nu_{31} \mathbf{a}_3. \quad (65)$$

Si osservi che, essendo il vettore  $\mathbf{n}_1$  unitario e ortogonale a  $\mathbf{a}_2$  e  $\mathbf{a}_3$ , si ha

$$1 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = (\nu_{11} \mathbf{a}_1 + \nu_{21} \mathbf{a}_2 + \nu_{31} \mathbf{a}_3) \cdot \mathbf{n}_1 = \nu_{11} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}_1) = \frac{1}{\nu_{11}}, \quad (66)$$

Inoltre, per le proprietà del volume e dell'area,

$$\text{area}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \text{vol}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{n}_1) = \nu_{11} \text{vol}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1) \quad \Rightarrow \quad \nu_{11} = \frac{\text{area}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\text{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}. \quad (67)$$

Dalla espressione del tensore momento si ha pertanto

$$\mathbf{M} \mathbf{n}_1 = (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{f}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{f}_2 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{f}_3) \mathbf{n}_1 = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{f}_1 = \frac{\text{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\text{area}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} \mathbf{f}_1 \quad (68)$$

e infine

$$\frac{\mathbf{M}}{\text{vol}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\text{area}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}. \quad (69)$$

Analoghe espressioni si ottengono applicando  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{n}_2$  e  $\mathbf{n}_3$ .

## 5 Tensore momento come descrittore di classi di equipotenza

I risultati precedenti si possono generalizzare nel seguente:

*assegnata, per un corpo di forma  $\mathcal{R}$ , una classe di equipotenza, con forza risultante  $\mathbf{f}$  e momento risultante  $\mathbf{M}$  rispetto ad un polo  $\mathbf{x}_O$ , esiste un rappresentante di tale classe costituito dalla forza  $\mathbf{f}$  applicata nel punto che occupa la posizione  $\mathbf{x}_O$  e da una distribuzione di forza sul bordo  $\partial\mathcal{R}$ , avente risultante nulla, data da*

$$\mathbf{t} := \mathbf{L}\mathbf{n}, \quad (70)$$

*essendo  $\mathbf{n}$  la normale esterna al bordo  $\partial\mathcal{R}$  e avendo posto*

$$\mathbf{L} := \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{R})}\mathbf{M}. \quad (71)$$

Si ha infatti per la risultante

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{L}\mathbf{n} dA = \mathbf{L} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{n} dA = \mathbf{o}, \quad (72)$$

e per il momento risultante

$$\int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{L}\mathbf{n}) dA = \mathbf{L} \int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{n}) dA = \mathbf{L} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{I} dV = \mathbf{M}, \quad (73)$$

essendo, per il teorema della divergenza di campi scalari e per la definizione del gradiente di un campo vettoriale,

$$\int_{\partial\mathcal{R}} 1\mathbf{n} dA = \int_{\mathcal{R}} \nabla 1 dV = \mathbf{o}, \quad (74)$$

$$\int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{n})\mathbf{e}_i dA = \int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{n} dA = \int_{\mathcal{R}} \nabla((\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \cdot \mathbf{e}_i) dV, \quad (75)$$

$$\nabla((\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \cdot \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( ((\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - \mathbf{x}_O) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \right) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i, \quad (76)$$

$$\Rightarrow \nabla((\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \quad (77)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \otimes \mathbf{n}) dA = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{I} dV, \quad (78)$$

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{I} dV = \mathbf{I} \text{vol}(\mathcal{R}). \quad (79)$$

### 5.1 Tensore momento antisimmetrico

Si consideri una classe di equipotenza con risultante nulla e tensore momento antisimmetrico. Un rappresentante di tale classe è la distribuzione sul bordo di un corpo a forma di rettangolo data dalle (58). Indicando la matrice del tensore momento con

$$[\mathbf{M}_{\mathbf{x}_0}] = \ell_1 \ell_2 \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ -t_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad (80)$$

risulta

$$\mathbf{t}_1 = -t_{12} \mathbf{e}_2, \quad (81)$$

$$\mathbf{t}_2 = t_{12} \mathbf{e}_1. \quad (82)$$

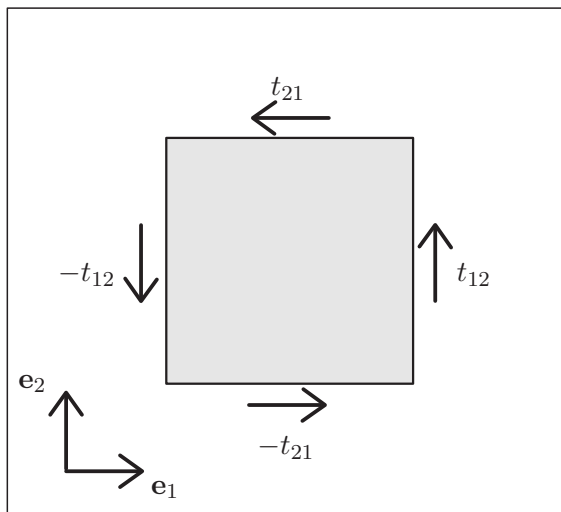


Figura 5: Corpo soggetto a una distribuzione di forza applicata sul bordo con risultante nulla e tensore momento antisimmetrico ( $t_{21} = -t_{12}$ ).

### 5.2 Tensore momento simmetrico

Si consideri una classe di equipotenza con risultante nulla e tensore momento simmetrico. Un rappresentante di tale classe è la distribuzione sul bordo di un corpo a forma di rettangolo data dalle (58). Indicando la matrice del tensore momento con

$$[\mathbf{M}_{\mathbf{x}_0}] = \ell_1 \ell_2 \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix}, \quad (83)$$

risulta

$$\mathbf{t}_1 = t_{11} \mathbf{e}_1 + t_{12} \mathbf{e}_2, \quad (84)$$

$$\mathbf{t}_2 = t_{12} \mathbf{e}_1 + t_{22} \mathbf{e}_2. \quad (85)$$

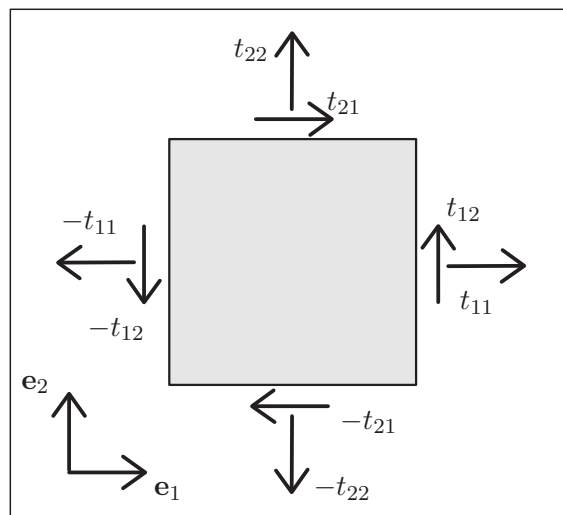


Figura 6: Corpo soggetto a una distribuzione di forza applicata sul bordo con risultante nulla e tensore momento simmetrico ( $t_{21} = t_{12}$ ).