Corpi affini

Indice

1 Principio di bilancio per un corpo rigido **2**

2 Principio di bilancio per un corpo affine **2**

3 Caratterizzazione della tensione **3**
- 3.1 Cambiamento di osservatore 3
- 3.2 Composizione con un moto rigido 5

4 Risposta del materiale **6**

5 Gruppo di simmetria del materiale **7**

6 Elasticità linearizzata per corpi affini **8**
- 6.1 Linearizzazione della risposta del materiale 8
- 6.2 Piccole deformazioni 9
- 6.3 Allungamenti e scorrimenti 10
- 6.4 Direzioni principali della dilatazione infinitesima 11
- 6.5 Rotazione infinitesima 11
- 6.6 Variazione di volume 11
- 6.7 Forza risultante e momento risultante linearizzati 12

7 Elasticità lineare per corpi affini **13**

1 Principio di bilancio per un corpo rigido

Un corpo rigido è un corpo le cui configurazioni possono essere ottenute attraverso una deformazione rigida di una di esse.

Si assuma il seguente principio: *in corrispondenza di una qualsiasi configurazione le forze sono tali che la potenza virtuale esterna in ogni atto di moto rigido è nulla*:

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w}. \tag{1}$$

Essendo in un atto di moto rigido

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{M}_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}} \cdot \mathbf{W}, \tag{2}$$

dove $\mathbf{f}$ è la forza risultante e $\mathbf{M}_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}}$ è il momento risultante rispetto ad un qualsiasi polo $\mathbf{x}_{\mathsf{O}}$, il principio enunciato è equivalente alle *equazioni di bilancio delle forze*

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{3}$$

$$\operatorname{skw} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}} = \mathbf{O}. \tag{4}$$

2 Principio di bilancio per un corpo affine

Un corpo affine è un corpo le cui configurazioni possono essere ottenute attraverso una deformazione affine di una di esse. Il corpo affine è il modello di corpo *deformabile* più semplice che si possa concepire.

Se si assumesse che in corrispondenza di una qualsiasi configurazione le forze sono tali che la potenza virtuale esterna in ogni atto di moto affine è nulla, poiché in un atto di moto affine è

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{M}_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}} \cdot \mathbf{G}, \tag{5}$$

si giungerebbe alla conclusione che

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{6}$$

$$\operatorname{skw} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}} = \mathbf{O}, \tag{7}$$

$$\operatorname{sym} \mathbf{M}_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}} = \mathbf{O}. \tag{8}$$

Questa ultima condizione escluderebbe la presenza di sistemi di forze che spendano potenza in atti di moto di dilatazione, rendendo il modello di corpo poco interessante. Al fine di descrivere la proprietà dei corpi deformabili di poter essere soggetti a sistemi di forze di tal genere, occorre ammettere l'esistenza di una *potenza interna* $\mathcal{W}^{(int)}$

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = -(\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{G}) \operatorname{vol}(\mathcal{R}), \tag{9}$$

con $\mathbf{z}$ e $\mathbf{T}$ caratterizzanti la configurazione del corpo per un particolare *materiale*, e assumere che *in corrispondenza di una qualsiasi configurazione le forze sono tali che la potenza virtuale* totale *in ogni atto di moto affine è nulla*:

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w}. \tag{10}$$

Il principio così formulato risulta equivalente alle *equazioni di bilancio delle forze*

$$\mathbf{f} - \mathbf{z}\,\mathrm{vol}(\mathcal{R}) = \mathbf{o}, \tag{11}$$
$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}} - \mathbf{T}\,\mathrm{vol}(\mathcal{R}) = \mathbf{O}. \tag{12}$$

$\mathbf{T}$ si dice *tensione*.

3 Caratterizzazione della tensione

Poiché la *potenza interna* $\mathcal{W}^{(int)}$ è definita per un corpo suscettibile di deformazioni non rigide, è ragionevole assumere che essa *sia nulla in ogni atto di moto rigido*:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = 0, \tag{13}$$

con $\mathbf{W}$ antisimmetrico. Tale principio risulta equivalente alle condizioni

$$\mathbf{z} = \mathbf{o}, \tag{14}$$
$$\mathrm{skw}\,\mathbf{T} = \mathbf{O}. \tag{15}$$

Le *equazioni di bilancio* per un corpo affine diventano pertanto

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{16}$$
$$\mathrm{skw}\,\mathbf{M} = \mathbf{O}, \tag{17}$$
$$\mathrm{sym}\,\mathbf{M} = \mathbf{T}\,\mathrm{vol}\,(\mathcal{R}), \tag{18}$$

dove si è eliminata la indicazione del polo $\mathbf{x}_{\mathsf{O}}$, essendo il momento indipendente da questo. Se si pone

$$\mathbf{L} := \frac{1}{\mathrm{vol}\,(\mathcal{R})}\mathbf{M}, \tag{19}$$

le equazioni di bilancio diventano

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{20}$$
$$\mathrm{skw}\,\mathbf{L} = \mathbf{O}, \tag{21}$$
$$\mathrm{sym}\,\mathbf{L} = \mathbf{T}. \tag{22}$$

3.1 Cambiamento di osservatore

Un punto di vista più generale consiste nel considerare due osservatori. Un moto affine $\boldsymbol{\phi}$

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}, t) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}, t) + \mathbf{F}(t)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) \tag{23}$$

visto dal primo osservatore sia, in termini di moto di ciascun punto,

$$\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t) = \mathbf{x}_{\mathsf{O}}(t) + \mathbf{F}(t)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}). \tag{24}$$

Lo stesso moto affine visto dal secondo osservatore sia

$$\mathbf{x}_\mathsf{A}^*(t) = \mathbf{x}_\mathsf{O}^*(t) + \mathbf{F}^*(t)(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A} - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{O}) \tag{25}$$

Il *cambiamento di osservatore* è definito dalla seguente relazione tra le posizioni

$$\mathbf{x}_\mathsf{A}^*(t) = \mathbf{x}_\mathsf{O}^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x}_\mathsf{A}(t) - \mathbf{x}_\mathsf{O}(t)), \tag{26}$$

essendo $\mathbf{Q}(t)$ un endomorfismo ortogonale. Sostituendo la (24) nella (26) si ottiene

$$\mathbf{x}_\mathsf{A}^*(t) = \mathbf{x}_\mathsf{O}^*(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(t)(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A} - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{O}). \tag{27}$$

Risulta pertanto

$$\mathbf{F}^*(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(t). \tag{28}$$

Derivando rispetto a t le (24) e (25) si ottengono

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A} = \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{O} + \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_\mathsf{A} - \mathbf{x}_\mathsf{O}), \tag{29}$$
$$\dot{\mathbf{x}}_\mathsf{A}^* = \dot{\mathbf{x}}_\mathsf{O}^* + \dot{\mathbf{F}}^*(\mathbf{F}^*)^{-1}(\mathbf{x}_\mathsf{A}^* - \mathbf{x}_\mathsf{O}^*), \tag{30}$$

in cui, per la (28),

$$\dot{\mathbf{F}}^*(\mathbf{F}^*)^{-1} = (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}})(\mathbf{Q}\mathbf{F})^{-1} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}. \tag{31}$$

Gli atti di moto test corrispondenti per i due osservatori sono dunque, per ogni istante t,

$$\mathbf{w}_\mathsf{A} = \mathbf{w}_\mathsf{O} + \mathbf{G}(\mathbf{x}_\mathsf{A} - \mathbf{x}_\mathsf{O}), \tag{32}$$
$$\mathbf{w}_\mathsf{A}^* = \mathbf{w}_\mathsf{O}^* + \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_\mathsf{A}^* - \mathbf{x}_\mathsf{O}^*), \tag{33}$$

con

$$\mathbf{G}^* = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} + \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}^\mathsf{T}. \tag{34}$$

Dalle espressioni precedenti si può calcolare la differenza tra le velocità viste dai due osservatori. Conviene esprimere tale differenza nel modo seguente. Applicando $\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ alla (33), sottraendo la (32) e utilizzando poi la (26) e la (34), si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{w}_\mathsf{A}^* - \mathbf{w}_\mathsf{A} &= (\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{w}_\mathsf{O}^* - \mathbf{w}_\mathsf{O}) + \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{G}^*(\mathbf{x}_\mathsf{A}^* - \mathbf{x}_\mathsf{O}^*) - \mathbf{G}(\mathbf{x}_\mathsf{A} - \mathbf{x}_\mathsf{O})\\ &= (\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{w}_\mathsf{O}^* - \mathbf{w}_\mathsf{O}) + (\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{G}^*\mathbf{Q} - \mathbf{G})(\mathbf{x}_\mathsf{A} - \mathbf{x}_\mathsf{O})\\ &= (\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{w}_\mathsf{O}^* - \mathbf{w}_\mathsf{O}) + \mathbf{Q}^\mathsf{T}\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}_\mathsf{A} - \mathbf{x}_\mathsf{O}).\end{aligned} \tag{35}$$

La relazione tra le velocità viste dai due osservatori è data dunque dalle espressioni

$$\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{w}_\mathsf{A}^* - \mathbf{w}_\mathsf{A} = \mathbf{w}_r + \mathbf{W}_r(\mathbf{x}_\mathsf{A} - \mathbf{x}_\mathsf{O}), \tag{36}$$
$$\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{G}^*\mathbf{Q} = \mathbf{W}_r + \mathbf{G}. \tag{37}$$

avendo posto

$$\mathbf{w}_r := \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{w}_\mathsf{O}^* - \mathbf{w}_\mathsf{O}, \tag{38}$$
$$\mathbf{W}_r := \mathbf{Q}^\mathsf{T}\dot{\mathbf{Q}}. \tag{39}$$

Si noti che ad un istante t e per un fissato valore di $\mathbf{Q}$ i valori di $\mathbf{w}_r$ e di $\mathbf{W}_r$ dipendono dai valori di $\mathbf{w}^*_{\mathsf{O}}$ e di $\dot{\mathbf{Q}}$.

Il *principio di obiettività materiale* si formula nel modo seguente: *la potenza interna sia invariante in un cambiamento di osservatore.* Questo implica che ad ogni istante t per qualunque cambiamento di osservatore

$$\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{w}^*_{\mathsf{O}} + \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}^* = \mathbf{z} \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \tag{40}$$

qualunque sia l'atto di moto test. Sostituendo le (38) e (37)

$$\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{w}_r + \mathbf{w}_{\mathsf{O}}) + \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{W}_r + \mathbf{G})\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \tag{41}$$
$$\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{z}^* \cdot (\mathbf{w}_r + \mathbf{w}_{\mathsf{O}}) + \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{T}^*\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{W}_r + \mathbf{G}) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \tag{42}$$
$$\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{w}_r + (\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{z}^* - \mathbf{z}) \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{T}^*\mathbf{Q} \cdot \mathbf{W}_r + (\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{T}^*\mathbf{Q} - \mathbf{T}) \cdot \mathbf{G} = 0 \tag{43}$$

Affinché questa condizione valga $\forall\mathbf{Q}, \forall\mathbf{w}_r, \forall\mathbf{W}_r, \forall\mathbf{w}_{\mathsf{O}}, \forall\mathbf{G}$, deve pertanto essere

$$\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{z}^* = \mathbf{o}, \tag{44}$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{z}^*, \tag{45}$$
$$\operatorname{skw}(\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{T}^*\mathbf{Q}) = \mathbf{O}, \tag{46}$$
$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{T}^*\mathbf{Q}, \tag{47}$$

da cui derivano di nuovo la (14) e la (15).

3.2 Composizione con un moto rigido

Un altro punto di vista, equivalente al precedente, consiste nel considerare il moto affine (23) e la sua composizione con un moto rigido

$$\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}, t)) = \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}, t)) + \mathbf{Q}(t)(\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}, t) - \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}, t)). \tag{48}$$

Sostituendo la (23) si ha

$$\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}, t)) = \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}, t)) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(t)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}). \tag{49}$$

Ponendo $\boldsymbol{\phi}^* = \boldsymbol{\phi}_r \circ \boldsymbol{\phi}$, la descrizione del moto composto diventa

$$\boldsymbol{\phi}^*(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}, t) = \boldsymbol{\phi}^*(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}, t) + \mathbf{F}^*(t)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) \tag{50}$$

con

$$\mathbf{F}^*(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(t). \tag{51}$$

Descrivendo i due moti attraverso le espressioni

$$\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t) = \mathbf{x}_{\mathsf{O}}(t) + \mathbf{F}(t)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}), \tag{52}$$
$$\mathbf{x}^*_{\mathsf{A}}(t) = \mathbf{x}^*_{\mathsf{O}}(t) + \mathbf{F}^*(t)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}), \tag{53}$$

la (48) diventa

$$\mathbf{x}^*_{\mathsf{A}} = \mathbf{x}^*_{\mathsf{O}} + \mathbf{Q}(\mathbf{x}_{\mathsf{A}} - \mathbf{x}_{\mathsf{O}}). \tag{54}$$

Derivando rispetto a t le (52) e (53) si ottengono

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} = \dot{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}} + \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_{\mathsf{A}} - \mathbf{x}_{\mathsf{O}}), \tag{55}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^*_{\mathsf{A}} = \dot{\mathbf{x}}^*_{\mathsf{O}} + \dot{\mathbf{F}}^*(\mathbf{F}^*)^{-1}(\mathbf{x}^*_{\mathsf{A}} - \mathbf{x}^*_{\mathsf{O}}), \tag{56}$$

in cui per la (51)

$$\dot{\mathbf{F}}^*(\mathbf{F}^*)^{-1} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}. \tag{57}$$

Gli atti di moto test corrispondenti per i due moti sono dunque, per ogni istante t,

$$\mathbf{w}_{\mathsf{A}} = \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(\mathbf{x}_{\mathsf{A}} - \mathbf{x}_{\mathsf{O}}), \tag{58}$$

$$\mathbf{w}^*_{\mathsf{A}} = \mathbf{w}^*_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}^*(\mathbf{x}^*_{\mathsf{A}} - \mathbf{x}^*_{\mathsf{O}}), \tag{59}$$

con

$$\mathbf{G}^* = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} + \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}. \tag{60}$$

Poiché le espressioni precedenti sono uguali a quelle ottenute per un cambiamento di osservatore, si giunge alle stesse conclusioni se si formula il *principio di obiettività materiale* nei seguenti termini: *la potenza interna sia invariante nella composizione con un moto rigido.*

4 Risposta del materiale

Al fine di caratterizzare la relazione tra la tensione e il moto, propria di una classe di materiali, si assumono in generale i seguenti principi:

- Principio di determinismo: *la tensione è determinata dalla storia trascorsa della deformazione.*
- Principio di azione locale: *la tensione in un punto non dipende dalla deformazione in altri punti ad una distanza finita.*

Si consideri il moto affine descritto dalla espressione (23). Ad ogni istante la deformazione è definita dal valore in $\mathbf{x}_{\mathsf{O}}$ e dal gradiente $\mathbf{F}$. Poiché per il principio di azione locale la tensione non può dipendere dal valore in un particolare punto, essa dipenderà solo dal gradiente. La *funzione di risposta* all'istante t ha pertanto la forma

$$\mathbf{T} = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}^t), \tag{61}$$

dove con $\mathbf{F}^t$ si indica la storia del moto attraverso il gradiente della deformazione. Una classe di materiali particolarmente importante è quella dei *materiali elastici*, caratterizzata dalla seguente proprietà: *la tensione dipende solo dal valore attuale del gradiente della deformazione.* La funzione di risposta in questo caso diventa

$$\mathbf{T} = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}). \tag{62}$$

Si noti che la funzione di risposta include la descrizione di una configurazione $\bar{\chi}$ a cui si riferisce la deformazione $\boldsymbol{\phi}$.

Si consideri per un materiale elastico il moto affine (24) e il corrispondente moto (25) in un cambiamento di osservatore descritto dalla (26). La risposta, vista dal secondo osservatore, sarà, per la (28)

$$\mathbf{T}^{*}=\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}^{*})=\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{QF}). \tag{63}$$

Poiché il *principio di obiettività materiale* implica la (47), sostituendo in questa la (62) e la (63) si ottiene

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})=\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{QF})\mathbf{Q} \tag{64}$$

Tale proprietà deve essere garantita dalla funzione di risposta per una qualsiasi scelta di $\mathbf{Q}$. Considerando tra i casi possibili quello in cui $\mathbf{Q}=\mathbf{R}^{\mathsf{T}}$, essendo $\mathbf{R}$ la rotazione in

$$\mathbf{F}=\mathbf{RU}, \tag{65}$$

deve essere necessariamente vera la condizione

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})=\mathbf{R}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})\mathbf{R}^{\mathsf{T}}, \tag{66}$$

o la condizione equivalente

$$\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{R}=\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U}). \tag{67}$$

Viceversa se una funzione di risposta ha la proprietà (66), allora risulta soddisfatta la (47) per qualsiasi $\mathbf{Q}$ (*teorema di Cellerier e Richter*). Infatti utilizzando la (66) nella (63) si ha

$$\mathbf{T}^{*}=\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{QF})=(\mathbf{QR})\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})(\mathbf{QR})^{\mathsf{T}}=\mathbf{Q}(\mathbf{R}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})\mathbf{R}^{\mathsf{T}})\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}=\mathbf{Q}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}=\mathbf{QTQ}^{\mathsf{T}} \tag{68}$$

equivalente alla (47). La proprietà (66) caratterizza dunque tutti i materiali elastici ed è detta *forma ridotta della funzione di risposta per materiali elastici.*

5 Gruppo di simmetria del materiale

Si osservi che se la deformazione affine $\boldsymbol{\phi}$ è *preceduta* da una deformazione rigida $\boldsymbol{\phi}_r$ tale che

$$\bar{\mathsf{x}}_{\mathsf{A}}=\boldsymbol{\phi}_r(\check{\mathsf{x}}_{\mathsf{A}})=\boldsymbol{\phi}_r(\check{\mathsf{x}}_{\mathsf{O}})+\mathbf{Q}(\check{\mathsf{x}}_{\mathsf{A}}-\check{\mathsf{x}}_{\mathsf{O}}) \tag{69}$$

risulta definita la deformazione affine $\boldsymbol{\phi}^{\star}=\boldsymbol{\phi}\circ\boldsymbol{\phi}_r$, tale che

$$\boldsymbol{\phi}^{\star}(\check{\mathsf{x}}_{\mathsf{A}})=\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\phi}_r(\check{\mathsf{x}}_{\mathsf{A}}))=\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\phi}_r(\check{\mathsf{x}}_{\mathsf{O}}))+\mathbf{FQ}(\check{\mathsf{x}}_{\mathsf{A}}-\check{\mathsf{x}}_{\mathsf{O}}), \tag{70}$$

con gradiente $\mathbf{F}^{\star}=\mathbf{FQ}$. La tensione corrispondente è

$$\mathbf{T}^{\star}=\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}^{\star})=\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{FQ}). \tag{71}$$

Il gruppo costituito dalle rotazioni $\mathbf{Q}$ che lasciano invariata la risposta, cioè tali che

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{FQ})=\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}), \tag{72}$$

si dice *gruppo di simmetria del materiale.*

Si dicono *isotropi* quei materiali il cui gruppo di simmetria è proprio il gruppo delle rotazioni di $\mathcal{V}$.

6 Elasticità linearizzata per corpi affini

6.1 Linearizzazione della risposta del materiale

Di solito i corpi si deformano molto poco. Ha dunque interesse valutare la risposta a "piccole deformazioni".

Si consideri una traiettoria generata da deformazioni affini dipendenti da un parametro di controllo β

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}, \beta) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{O}, \beta) + \mathbf{F}(\beta)(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A} - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{O}). \tag{73}$$

La tensione, data dalla funzione di risposta (66), è

$$\mathbf{T}(\beta) = \mathbf{R}(\beta)\,\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U}(\beta))\,\mathbf{R}^\mathsf{T}(\beta). \tag{74}$$

Assumendo che β sia tale che $\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}, 0) = \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}$ per ogni punto A del corpo, risulta

$$\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}. \tag{75}$$

Assumendo inoltre che per $\beta = 0$ sia[1]

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}) = \mathbf{O}, \tag{76}$$

si consideri lo sviluppo in serie della (74)

$$\mathbf{T}(\beta) = \nabla\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{I})\,\widetilde{\mathbf{U}}(0)\beta + o(\beta), \tag{77}$$

dove $\nabla\widehat{\mathbf{T}}$ è il gradiente del campo $\widehat{\mathbf{T}}$ e $\widetilde{\mathbf{U}}$ è la derivata di $\mathbf{U}$ rispetto a β. Si osservi che dalla decomposizione polare del gradiente della deformazione

$$\mathbf{F}(\beta) = \mathbf{R}(\beta)\mathbf{U}(\beta), \tag{78}$$

derivando rispetto a β si ha

$$\widetilde{\mathbf{F}}(0) = \widetilde{\mathbf{R}}(0)\mathbf{U}(0) + \mathbf{R}(0)\widetilde{\mathbf{U}}(0) = \widetilde{\mathbf{R}}(0) + \widetilde{\mathbf{U}}(0), \tag{79}$$

dove $\widetilde{\mathbf{R}}(0)$ è antisimmetrico poiché

$$\mathbf{R}(\beta)^\mathsf{T}\mathbf{R}(\beta) = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mathbf{R}}(0)^\mathsf{T} + \widetilde{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{O}, \tag{80}$$

mentre $\widetilde{\mathbf{U}}(0)$ è simmetrico poiché tale è $\mathbf{U}(\beta)$. Pertanto lo sviluppo in serie della (78) risulta

$$\mathbf{F}(\beta) = \mathbf{I} + \widetilde{\mathbf{F}}(0)\beta + o(\beta) = \mathbf{I} + \widetilde{\mathbf{R}}(0)\beta + \widetilde{\mathbf{U}}(0)\beta + o(\beta). \tag{81}$$

Ponendo

$$\boldsymbol{\Theta}(\beta) := \widetilde{\mathbf{R}}(0)\beta, \tag{82}$$

$$\mathbf{E}(\beta) := \widetilde{\mathbf{U}}(0)\beta, \tag{83}$$

[1] Si dice in tal caso che il corpo è in uno *stato naturale*.

la (81) diventa

$$\mathbf{F}(\beta) = \mathbf{I} + \mathbf{\Theta}(\beta) + \mathbf{E}(\beta) + o(\beta), \tag{84}$$

Si ha anche

$$\mathbf{R}(\beta) = \mathbf{I} + \widetilde{\mathbf{R}}(0)\beta + o(\beta) = \mathbf{I} + \mathbf{\Theta}(\beta) + o(\beta), \tag{85}$$

$$\mathbf{U}(\beta) = \mathbf{I} + \widetilde{\mathbf{U}}(0)\beta + o(\beta) = \mathbf{I} + \mathbf{E}(\beta) + o(\beta). \tag{86}$$

Per questa ragione $\mathbf{\Theta}$ e $\mathbf{E}$ sono dette rispettivamente *rotazione infinitesima* e *dilatazione infinitesima*. Esse sono la approssimazione lineare, a meno di $\mathbf{I}$, della rotazione e della dilatazione, così come la decomposizione additiva (81) è la approssimazione lineare della decomposizione polare (78). Per via della (83) la (77) può dunque scriversi

$$\mathbf{T}(\beta) = \nabla\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{I})\,\mathbf{E}(\beta) + o(\beta). \tag{87}$$

Pertanto per β abbastanza piccolo

$$\mathbf{T}(\beta) \simeq \nabla\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{I})\,\mathbf{E}(\beta). \tag{88}$$

6.2 Piccole deformazioni

Si consideri la deformazione (73) e la corrispondente espressione in termini di *spostamento*

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}, \beta) = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}, \beta) + \nabla\mathbf{u}(\beta)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}), \tag{89}$$

dove

$$\nabla\mathbf{u}(\beta) := \mathbf{F}(\beta) - \mathbf{I} \tag{90}$$

è il *gradiente dello spostamento*. Per la (84) si ha

$$\nabla\mathbf{u}(\beta) = \mathbf{F}(\beta) - \mathbf{I} = \mathbf{\Theta}(\beta) + \mathbf{E}(\beta) + o(\beta), \tag{91}$$

Pertanto dalla (73) e dalla (89) si ottengono

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) - \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) = (\mathbf{I} + \mathbf{\Theta} + \mathbf{E})(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) + o(\beta), \tag{92}$$

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) - \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) = (\mathbf{\Theta} + \mathbf{E})(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) + o(\beta). \tag{93}$$

Se $\mathbf{F}(\beta)$ è vicino a $\mathbf{I}$ allora $\nabla\mathbf{u}(\beta)$ sarà vicino a $\mathbf{O}$, come pure $\mathbf{\Theta}(\beta)$ che $\mathbf{E}(\beta)$. Si osservi che, poiché

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\nabla\mathbf{u}(\beta)}{\beta} = \lim_{\beta\to 0}\frac{\mathbf{\Theta}(\beta) + \mathbf{E}(\beta)}{\beta} = \lim_{\beta\to 0}\frac{\widetilde{\mathbf{R}}(0)\beta + \widetilde{\mathbf{U}}(0)\beta + \mathfrak{o}(\beta)}{\beta} = \widetilde{\mathbf{R}}(0) + \widetilde{\mathbf{U}}(0), \tag{94}$$

se si assume

$$0 < \|\widetilde{\mathbf{R}}(0) + \widetilde{\mathbf{U}}(0)\| < \infty, \tag{95}$$

$\nabla\mathbf{u}(\beta)$ risulta dello stesso ordine di β. Pertanto se $\nabla\mathbf{u}(\beta)$ è abbastanza piccolo si può approssimare la funzione di risposta (87) con la sua parte lineare

$$\mathbf{T}(\beta) \simeq \nabla\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{I})\,\mathbf{E}(\beta). \tag{96}$$

6.3 Allungamenti e scorrimenti

Si osservi che per la (86) si ha

$$\begin{aligned}\|\mathbf{U}(\beta)\mathbf{a}\| &= (\mathbf{U}(\beta)\mathbf{a}\cdot\mathbf{U}(\beta)\mathbf{a})^{\frac{1}{2}} = \big(\mathbf{U}(\beta)^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\big)^{\frac{1}{2}}\\ &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{-\frac{1}{2}}(2\mathbf{E}(\beta)\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) + o(\beta) = \|\mathbf{a}\| + \frac{\mathbf{E}(\beta)\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} + o(\beta).\end{aligned} \tag{97}$$

Pertanto la dilatazione nella direzione $\mathbf{a}$ ha il seguente sviluppo in serie

$$\frac{\|\mathbf{U}(\beta)\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} = 1 + \frac{\mathbf{E}(\beta)\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} + o(\beta). \tag{98}$$

Indicando la matrice di $\mathbf{E}$ in un base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ con

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{pmatrix}, \tag{99}$$

per la (98) risulta

$$\frac{\|\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_1\|}{\|\mathbf{e}_1\|} = 1 + \mathbf{E}(\beta)\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + o(\beta) = 1 + \varepsilon_{11}(\beta) + o(\beta). \tag{100}$$

Pertanto, a meno di $o(\beta)$, $\varepsilon_{11}(\beta)$ è l'allungamento nella direzione di $\mathbf{e}_1$, $\varepsilon_{22}(\beta)$ è l'allungamento nella direzione di $\mathbf{e}_2$, $\varepsilon_{33}(\beta)$ è l'allungamento nella direzione di $\mathbf{e}_3$. In corrispondenza della coppia di vettori $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ si ha inoltre

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_2 = \mathbf{U}(\beta)^2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = \big(\mathbf{I} + \mathbf{E}(\beta) + o(\beta)\big)^2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = \big(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}(\beta) + o(\beta)\big)\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\\ = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{E}(\beta)\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + o(\beta) = 2\varepsilon_{21} + o(\beta).\end{aligned} \tag{101}$$

Utilizzando la (100) si ha anche

$$\|\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_1\|\|\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_2\| = (1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22}) + o(\beta) = 1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + o(\beta) \tag{102}$$

$$(\|\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_1\|\|\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_2\|)^{-1} = 1 - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} + o(\beta). \tag{103}$$

Ne deriva

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \gamma_{21}(\beta)) = \frac{\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_2}{\|\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_1\|\|\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_2\|} = 2\varepsilon_{21}(\beta) + o(\beta). \tag{104}$$

Poiché $\cos(\frac{\pi}{2} - \gamma_{21}(\beta)) = \sin\gamma_{21}(\beta)$, per lo scorrimento $\gamma_{21}(\beta)$ corrispondente alla coppia di vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ si ottiene

$$\gamma_{21}(\beta) = 2\varepsilon_{21}(\beta) + o(\beta). \tag{105}$$

Per la stessa ragione si ha

$$\gamma_{32}(\beta) = 2\varepsilon_{32}(\beta) + o(\beta), \quad \gamma_{13}(\beta) = 2\varepsilon_{13}(\beta) + o(\beta). \tag{106}$$

6.4 Direzioni principali della dilatazione infinitesima

Si noti che se $\mathbf{u}_i$ è un autovettore di $\mathbf{E}(\beta)$ e $\varepsilon_i(\beta)$ l'autovalore corrispondente, si ha

$$\mathbf{E}(\beta)\mathbf{u}_i = \varepsilon_i(\beta)\mathbf{u}_i \tag{107}$$

e dalla (86)

$$\mathbf{E}(\beta)\mathbf{u}_i = (\mathbf{U}(\beta) - \mathbf{I} + o(\beta))\mathbf{u}_i = \varepsilon_i(\beta)\mathbf{u}_i \tag{108}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{U}(\beta)\mathbf{u}_i = (1 + \varepsilon_i(\beta))\mathbf{u}_i + o(\beta). \tag{109}$$

Pertanto per β abbastanza piccolo gli autovettori di $\mathbf{U}(\beta)$ sono approssimati dagli autovettori di $\mathbf{E}(\beta)$ mentre le dilatazioni principali sono approssimate dalle espressioni

$$\lambda_i(\beta) \simeq 1 + \varepsilon_i(\beta). \tag{110}$$

6.5 Rotazione infinitesima

Una interpretazione della rotazione infinitesima si può dare nel seguente modo.

Si consideri una composizione di tre rotazioni

$$\mathbf{R}(\beta) = \mathbf{R}_3(\beta)\mathbf{R}_2(\beta)\mathbf{R}_1(\beta) \tag{111}$$

con asse rispettivamente $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ e ampiezze $\theta_1(\beta)$, $\theta_2(\beta)$, $\theta_3(\beta)$ nulle per $\beta = 0$. La espansione in serie risulta

$$\mathbf{R}(\beta) = \mathbf{I} + \widetilde{\mathbf{R}}_3(0)\beta + \widetilde{\mathbf{R}}_2(0)\beta + \widetilde{\mathbf{R}}_1(0)\beta + o(\beta) \tag{112}$$

essendo le matrici di $\widetilde{\mathbf{R}}_3(0)\beta$, $\widetilde{\mathbf{R}}_2(0)\beta$, $\widetilde{\mathbf{R}}_1(0)\beta$ rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{\theta}_3(0)\beta & \\ \widetilde{\theta}_3(0)\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \widetilde{\theta}_2(0)\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\widetilde{\theta}_2(0)\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\widetilde{\theta}_1(0)\beta \\ 0 & \widetilde{\theta}_1(0)\beta & 0 \end{pmatrix}. \tag{113}$$

Queste espressioni suggeriscono di interpretare la rotazione infinitesima $\mathbf{\Theta}(\beta)$, che è antisimmetrica, come la approssimazione lineare della composizione di tre rotazioni con assi $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ e ampiezze $\theta_1(\beta)$, $\theta_2(\beta)$, $\theta_3(\beta)$.

6.6 Variazione di volume

Per il volume del parallelepipedo di spigoli $\{\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_1, \mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_2, \mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_3\}$, utilizzando la (86), si ha

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}\,(\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_1, \mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_2, \mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_3) \\
&\quad = \mathrm{vol}\,((\mathbf{I} + \mathbf{E}(\beta))\mathbf{e}_1, (\mathbf{I} + \mathbf{E}(\beta))\mathbf{e}_2, (\mathbf{I} + \mathbf{E}(\beta))\mathbf{e}_3) + o(\beta) \\
&\quad = \mathrm{vol}\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}\,(\mathbf{E}(\beta)\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{E}(\beta)\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \mathrm{vol}\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{E}(\beta)\mathbf{e}_3) + o(\beta) \\
&\quad = \mathrm{vol}\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\big(1 + (\varepsilon_{11}(\beta) + \varepsilon_{22}(\beta) + \varepsilon_{33}(\beta))\big) + o(\beta).
\end{aligned} \tag{114}$$

Risulta dunque

$$\det \mathbf{F}(\beta) = \frac{\mathrm{vol}\,(\mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_1, \mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_2, \mathbf{U}(\beta)\mathbf{e}_3)}{\mathrm{vol}\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 1 + \mathrm{tr}\,\mathbf{E}(\beta) + o(\beta). \tag{115}$$

Pertanto per β abbastanza piccolo è

$$\det \mathbf{F}(\beta) \simeq 1 + \mathrm{tr}\,\mathbf{E}(\beta). \tag{116}$$

6.7 Forza risultante e momento risultante linearizzati

Lungo una traiettoria dipendente da un parametro di controllo β, descritta dalla (73), la potenza si una forza $\mathbf{f}_{\mathsf{A}}(\beta)$ applicata nel punto A risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathsf{A}}(\beta) \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{A}} &= \mathbf{f}_{\mathsf{A}}(\beta) \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(\beta) - \mathbf{x}_{\mathsf{O}}(\beta)) \otimes \mathbf{f}_{\mathsf{A}}(\beta) \cdot \mathbf{G} \\ &= \mathbf{f}_{\mathsf{A}}(\beta) \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{F}(\beta)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(\beta) - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}(\beta)) \otimes \mathbf{f}_{\mathsf{A}}(\beta) \cdot \mathbf{G}. \end{aligned} \tag{117}$$

Lo sviluppo in serie del momento, assumendo che la forza $\mathbf{f}_{\mathsf{A}}(\beta)$ sia lineare rispetto a β e nulla per $\beta = 0$, risulta

$$\mathbf{F}(\beta)(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(\beta) - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}(\beta)) \otimes \mathbf{f}_{\mathsf{A}}(\beta) = (\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}(\beta) - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}(\beta)) \otimes \mathbf{f}_{\mathsf{A}}(\beta) + o(\beta) \tag{118}$$

La potenza di una distribuzione di forza $\mathbf{b}(\beta)$ su $\mathcal{R}$ in un campo di velocità $\mathbf{w}$ è l'integrale

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w}\; dV \tag{119}$$

Tale integrale si può riguardare come integrale sulla forma $\bar{\mathcal{R}}$, attraverso la formula generale del cambiamento di variabile

$$\int_{\mathcal{R}_\beta} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w}\; dV = \int_{\bar{\mathcal{R}}} (\mathbf{b}(\beta) \circ \boldsymbol{\phi}) \cdot (\mathbf{w} \circ \boldsymbol{\phi}) \det \mathbf{F}(\beta)\; dV \tag{120}$$

che più brevemente si può scrivere

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w}\; dV = \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w} \det \mathbf{F}(\beta)\; dV. \tag{121}$$

Utilizzando la espansione in serie di $\det \mathbf{F}(\beta)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}_\beta} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w}\; dV &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w}\; (1 + \mathrm{tr}\,\mathbf{E}(\beta) + o(\beta))\; dV \\ &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w}\; dV + \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w}\; \mathrm{tr}\,\mathbf{E}(\beta)\; dV + o(\beta). \end{aligned} \tag{122}$$

Assumendo che $\mathbf{b}(\beta)$ sia lineare rispetto a β e nullo per $\beta = 0$, $\mathbf{E}(\beta)$ dello stesso ordine di β, risulta

$$\int_{\mathcal{R}_\beta} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w}\; dV = \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w}\; dV + o(\beta). \tag{123}$$

Inoltre dalla espressione della velocità

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathsf{O}}) = \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{GF}(\beta)(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) \tag{124}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}_\beta} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w}\, dV &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}}\, dV + \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}(\beta) \cdot \mathbf{GF}(\beta)(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}})\, dV + o(\beta) \\ &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}(\beta)\, dV \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \int_{\bar{\mathcal{R}}} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) \otimes \mathbf{b}(\beta)\, dV \cdot \mathbf{G} \; + o(\beta). \end{aligned} \tag{125}$$

È possibile dimostrare anche che, se $\mathbf{t}(\beta)$ è lineare rispetto a β e nullo per $\beta = 0$, allora

$$\int_{\partial\mathcal{R}_\beta} \mathbf{t}(\beta) \cdot \mathbf{w}\, dA = \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t}(\beta)\, dA \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) \otimes \mathbf{t}(\beta)\, dA \cdot \mathbf{G} \; + o(\beta). \tag{126}$$

7 Elasticità lineare per corpi affini

Se nella (77) si considera solo la parte lineare si ottiene la funzione di risposta della *teoria lineare dell'elasticità*

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}(\mathbf{E}). \tag{127}$$

L'applicazione lineare $\mathbb{C}$ è detta *tensore dell'elasticità*.

In particolare, per materiali elastici *isotropi* si dimostra che

$$\mathbb{C}(\mathbf{E}) = \lambda\, \mathrm{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}. \tag{128}$$

Le costanti λ e μ si dicono moduli di Lamè.

La rotazione infinitesima e la dilatazione infinitesima sono definite come

$$\mathbf{\Theta} := \mathrm{skw}\,(\nabla\mathbf{u}) = \mathrm{skw}\,(\mathbf{F} - \mathbf{I}), \tag{129}$$

$$\mathbf{E} := \mathrm{sym}\,(\nabla\mathbf{u}) = \mathrm{sym}\,(\mathbf{F} - \mathbf{I}), \tag{130}$$

Una deformazione affine è descritta dalla espressione

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) + \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) + (\mathbf{I} + \mathbf{\Theta} + \mathbf{E})(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) \tag{131}$$

che assume la forma in termini di spostamento

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) + \nabla\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) + (\mathbf{\Theta} + \mathbf{E})(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}) \tag{132}$$

Le equazioni di bilancio per un corpo affine sono

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{133}$$

$$\mathrm{skw}\,\mathbf{M} = \mathbf{O}, \tag{134}$$

$$\mathrm{sym}\,\mathbf{M} = \mathbf{T}\,\mathrm{vol}\,(\bar{\mathcal{R}}), \tag{135}$$

in cui la forza risultante e il momento risultante sono dati dalle espressioni

$$\mathbf{f} = \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b}\, dV + \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t}\, dA, \tag{136}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} = \int_{\bar{\mathcal{R}}} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_O) \otimes \mathbf{b}\, dV + \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_O) \otimes \mathbf{t}\, dA \tag{137}$$

e la tensione $\mathbf{T}$ è data dalla (127). Utilizzando per la matrice di $\mathbf{E}$ la espressione

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \dfrac{\gamma_{12}}{2} & \dfrac{\gamma_{13}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_{22} & \dfrac{\gamma_{23}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{31}}{2} & \dfrac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \tag{138}$$

il termine ε_{11} ha il significato di allungamento nella direzione $\mathbf{e}_1$; il termine γ_{12} ha il significato di scorrimento corrispondente alle direzioni $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Utilizzando per la matrice di $\mathbf{\Theta}$ la espressione

$$[\mathbf{\Theta}] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{139}$$

i termini θ_1, θ_2, θ_3 hanno il significato di ampiezza di tre rotazioni rispettivamente con assi $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.